经国家教委中小学教材
审定委员会审查试用

九年义务教育三年制初级中学教科书

代数

DAI SHU

第二册

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

九年义务教育三年制初级中学教科书

代　数

第二册

人民教育出版社

(京)新登字 113 号

九年义务教育三年制初级中学教科书

代　数

第 二 册

人民教育出版社中学数学室　编著

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

北 京 出 版 社 重 印

北 京 市 新 华 书 店 发 行

北京第二新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 7.75　字数 129 000

1993 年 10 月第 1 版　1999 年 6 月第 6 次印刷

印数 1—96 120

ISBN 7—107—01924—4

G・3602(课)　定价:4.50 元

如发现印装质量问题影响阅读请与北京出版社联系

电话:62012334

说　明

一、这套九年义务教育三年制初级中学教科书《代数》第一至三册(其中第一册分上、下两册)，是根据国家教委颁发的《九年义务教育全日制小学、初级中学课程计划(试行)》、《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用)》编写的.

二、本书从1991年秋季起，在全国二十几个省、自治区、直辖市的数十万学生中进行了试验，并于1993年经国家教委中小学教材审定委员会审查通过.

三、本书是《代数》第二册，内容包括因式分解、分式、数的开方和二次根式等四章，供六三制初中二年级全学年使用，上学期每周3课时，下学期每周2课时.

四、本书在体例上有下列特点:

1. 每章均有一段配有插图的引言，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 每小节前均有一方框，对学生概要地提出了学习本小节的基本要求.

3. 在课文中适当穿插了"想一想"与"读一读"等栏目. 其中"想一想"是供学生思考的一些问题，"读一读"是供学生阅读的一些短文. 这两个栏目是为扩大知识面、增加趣味性而设的，其中的内容不作为教学要求，只供学生课外参考.

4. 每章后面均安排有"小结与复习"，其中的学习要求是对学生学完全章后的要求，它略高于小节前的要求.

5. 每章最后均配有一套“自我测验题”，用作学生自己检查学完这一章后，能否达到这一章的基本要求.

6. 全书最后附有部分习题的答案，供学生在做习题后，能及时进行对照，大致了解自己解题正确与否.

7. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类. 练习供课内巩固用；习题供课内或课外作业选用；复习题供复习每章时选用. 其中习题、复习题的题目分为 A，B 两组，A 组是属于基本要求范围的，B 组带有一定的灵活性，仅供学有余力的学生选用.

四、本书在编写过程中征求了部分教师和教研人员的意见，在此向北京市的王占元、明知白、郭立昌、张长胜，天津市的烟学敏、梁汝芳、吴雪娟，辽宁省的魏超群，吉林省的李浩明，江苏省的万庆炎，安徽省的薛凌，湖北省的冯善庆等同志表示衷心的感谢.

人民教育出版社中学数学室

1993 年 10 月

目　录

本书数学符号 ……1
第八章　因式分解 ……2
8.1　提公因式法 ……4
8.2　运用公式法 ……12
8.3　分组分解法 ……26
8.4　十字相乘法 ……33
读一读　用配方法分解二次三项式 ……43
小结与复习 ……45
复习题八 ……48
自我测验八 ……54
第九章　分式 ……56
9.1　分式 ……58
9.2　分式的基本性质 ……62
9.3　分式的乘除法 ……68
9.4　分式的加减法 ……76
读一读　从假分数化为带分数想起的 ……87
9.5　含有字母系数的一元一次方程 ……89
9.6　可化为一元一次方程的分式方程及其应用 ……94
小结与复习 ……103
复习题九 ……106
自我测验九 ……110
第十章　数的开方 ……112
10.1　平方根 ……114

10.2 平方根表……122
10.3 用计算器进行数的简单计算 ……130
10.4 立方根……138
读一读 n 次方根和 n 次算术根 ……143
10.5 立方根表……145
10.6 用计算器求数的立方根 ……148
10.7 实数 ……151
读一读 怎样用笔算开平方？……157
小结与复习……160
复习题十 ……163
自我测验十 ……167
第十一章 二次根式 ……168
11.1 二次根式 ……170
11.2 二次根式的乘法 ……173
读一读 比较二次根式的大小 ……179
11.3 二次根式的除法 ……180
11.4 最简二次根式 ……185
读一读 二次根式应用举例 ……188
11.5 二次根式的加减法 ……189
11.6 二次根式的混合运算 ……196
11.7 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的化简 ……207
小结与复习 ……211
复习题十一 ……214
自我测验十一……218
附录 部分习题答案 ……220

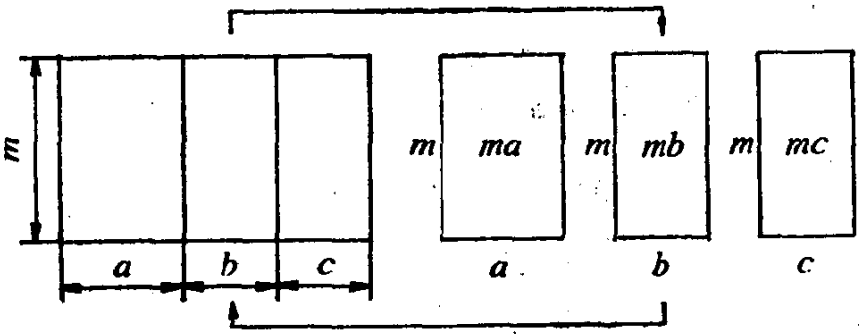
本书数学符号

$+$	加号，正号
$-$	减号，负号
$\times$ 或 $\cdot$	乘号
$\div$	除号
$:$	比号
%	百分号
$\sqrt{\ }$	二次根号
$\sqrt[3]{\ }$	三次根号
$\sqrt[n]{\ }$	n 次根号
$=$	等号
$<$	小于号
$>$	大于号
$\leqslant$	小于或等于号
$\geqslant$	大于或等于号
$\approx$	约等号
$\neq$	不等号
$\lvert\ \rvert$	绝对值号
$(\ )$	小括号
$[\ ]$	中括号
$\{\ \}$	大括号

第八章

因式分解

整式乘法 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$



因式分解 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$

整式乘法 $(a+b)(m+n)$

$a(m+n)+b(m+n)$

$am+an+bm+bn$

因式分解

请同学们看上一页上半部分的图，可以知道，

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc. \qquad ①$$

这个式子表明了两个因式相乘所得的结果．结果是一个多项式，其中各项都含有一个公共的因式 m.

把① 式反过来写，就是

$$ma+mb+mc=m(a+b+c). \qquad ②$$

这个式子表明：如果一个多项式的各项都含有一个公共的因式 m，那么这个多项式可以化为因式 m 与另一个因式的积．这种把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式**因式分解**，也叫做把这个多项式**分解因式**.

像把 $ma+mb+mc$ 写成 $m(a+b+c)$ 那样，就是把多项式因式分解.

① 式是做整式乘法，② 式是进行因式分解．由此可以看出，因式分解正好与整式乘法相反.

上一页下半部分的三个式子，也表明因式分解与整式乘法的关系.

上一页上半部分的图，还给出了因式分解的一种基本方法——提公因式法；下半部分的三个式子，给出了因式分解的另一种基本方法——分组分解法.

这一章就是学习因式分解的几种基本方法.

8.1 提公因式法

能够用提公因式法把多项式进行因式分解.

我们看多项式

$$ma+mb+mc,$$

各项都含有一个公共的因式 m，这时我们把因式 m 叫做这个多项式各项的公因式.

例如，m 是多项式 $ma+mb-mc$ 各项的公因式；

又如，d 是多项式 $ad+bd-cd$ 各项的公因式.

根据乘法的分配律，可得

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc,$$

反过来，便得到多项式 $ma+mb+mc$ 的因式分解的形式

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

也就是，多项式 $ma+mb+mc$ 各项都含有公因式 m，可以把公因式 m 提到括号外面，将多项式 $ma+mb+mc$ 写成因式 m 与 $a+b+c$ 乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.

一般地，如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.

下面我们用提公因式法把一些多项式分解因式.

例 1　把 $8a^3b^2-12ab^3c$ 分解因式.

分析:先应找出 $8a^3b^2$ 与 $-12ab^3c$ 的公因式,再提公因式进行分解. 公因式的系数应取各项系数的最大公约数;字母取各项的相同的字母,而且各字母的指数取次数最低的.

解: $8a^3b^2-12ab^3c$.

$=4ab^2\cdot 2a^2-4ab^2\cdot 3bc$

$=4ab^2(2a^2-3bc)$.

例 2　把 $3x^2-6xy+x$ 分解因式.

解: $3x^2-6xy+x$

$=x\cdot 3x-x\cdot 6y+x\cdot 1$

$=x(3x-6y+1)$.

注意　$x(3x-6y+1)=3x^2-6xy+x$,而 $x(3x-6y)=3x^2-6xy$, 所以原式分解因式为 $x(3x-6y+1)$, 而不是 $x(3x-6y)$. 这就是说, 1 作为项的系数通常可以省略, 但如果单独成一项时, 它在因式分解时不能漏掉.

例 3　把 $-4m^3+16m^2-26m$ 分解因式.

解: $-4m^3+16m^2-26m$

$=-(4m^3-16m^2+26m)$

$=-2m(2m^2-8m+13)$.

注意　如果多项式的第一项的系数是负的, 一般要提出“$-$”号, 使括号内的第一项的系数是正的. 在提出“$-$”号时, 多项式的各项都要变号.

练　习

1. (口答)下列由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是?

(1) $(x+2)(x-2)=x^2-4$;

(2) $x^2-4=(x+2)(x-2)$;

(3) $x^2-4+3x=(x+2)(x-2)+3x$.

2. (口答)指出下列多项式中各项的公因式:

(1) $ax+ay$;　　(2) $3mx-6mx$;

(3) $4a^2+10ab$;　　(4) $15a^2+5a$;

(5) x^2y+xy^2;　　(6) $12xyz-9x^2y^2$.

3. 填空:

(1) $2\pi R+2\pi r=$___$(R+r)$;

(2) $2\pi R+2\pi r=2\pi$(_____);

(3) $\frac{1}{2}gt_1^2+\frac{1}{2}gt_2^2=$___$(t_1^2+t_2^2)$;

(4) $\frac{1}{2}gt_1^2+\frac{1}{2}gt_2^2=\frac{1}{2}g$(_____);

(5) $3x^3+6x^2=$____$(x+2)$;

(6) $7a^2-21a=$____$(a-3)$;

(7) $15a^2+25ab^2=5a$(____);

(8) $x^2y+xy^2-xy=xy$(____).

4. 把下列各式分解因式:

(1) $nx-ny$;　　(2) a^2+ab;

(3) $4x^3-6x^2$;　　(4) $8m^2n+2mn$;

(5) $3a^2y-3ay+6y$;　　(6) $a^2b-5ab+9b$;

(7) $-x^2+xy-xz$;　　(8) $-24x^2y-12xy^2+28y^3$;

(9) $-3ma^3+6ma^2-12ma$;

(10) $56x^3yz+14x^2y^2z-21xy^2z^2$.

例 4　把 $2a(b+c)-3(b+c)$ 分解因式.

分析:应先找出 $2a(b+c)$ 与 $-3(b+c)$ 的公因式,再提公因式. 这两个式子中都有 $(b+c)$,如果设 $b+c=m$,问题就化为找出 $2am$ 与 $-3m$ 的公因式了.

解:$2a(b+c)-3(b+c)$

$=2a\cdot m-3\cdot m$

$=m(2a-3)$

$=(b+c)(2a-3)$.

这里设 $m=b+c$,这两步解题时不必写出.

从例 4 可以看出,字母 m 不仅可以表示一个数,还可以表示一个式. 在式子

$$ma+mb+mc=m(a+b+c)$$

中,m 为 $ma+mb+mc$ 各项的公因式. 这个公因式是一个代数式时,同样可以提出. 如例 4 的 $2a(b+c)-3(b+c)$,应该看出,$2a(b+c)$ 与 $-3(b+c)$ 的公因式是 $b+c$,可以直接提出,写成

$$2a(b+c)-3(b+c)=(b+c)(2a-3).$$

想一想下列各多项式中各项的公因式是什么:

$a(x+y)+b(x+y)$,

$x(a+3)-y(a+3)$,

$6m(p-3)+5n(p-3)$,

$7q(p-q)-2p(p-q)$,

$x(a+b)-y(a+b)+z(a+b)$.

例5 把 $6(x-2)+x(2-x)$ 分解因式.

分析: 应先找出 $6(x-2)$ 与 $x(2-x)$ 的公因式，再提公因式. 因为 $2-x=-(x-2)$，所以 $x-2$ 就是公因式.

解: $6(x-2)+x(2-x)$

$=6\cdot(x-2)-x\cdot(x-2)$

$=(x-2)(6-x)$.

例6 把 $18b(a-b)^2-12(a-b)^3$ 分解因式.

解: $18b(a-b)^2-12(a-b)^3$

$=6(a-b)^2\cdot 3b-6(a-b)^2\cdot 2(a-b)$

$=6(a-b)^2[3b-2(a-b)]$

$=6(a-b)^2(3b-2a+2b)$

$=6(a-b)^2(5b-2a)$.

例7 把 $5(x-y)^3+10(y-x)^2$ 分解因式.

分析: 要找出 $5(x-y)^3$ 与 $10(y-x)^2$ 的公因式. 因为 $(y-x)^2=[-(x-y)]^2=(x-y)^2$, 所以 $(x-y)^2$ 就是公因式.

解: $5(x-y)^3+10(y-x)^2$

$=5(x-y)^3+10(x-y)^2$

$=5(x-y)^2\cdot(x-y)+5(x-y)^2\cdot 2$

$=5(x-y)^2[(x-y)+2]$

$=5(x-y)^2(x-y+2)$.

练 习

1. 在下列各式中等号右边的括号前填入正号或负号，使左边与右边相等：

(1) $y-x=$ $(x-y)$；　(2) $b-a=$ $(a-b)$；

(3) $d+c=$ $(c+d)$；　(4) $-z-y=$ $(y+z)$；

(5) $(b-a)^2=$ $(a-b)^2$；

(6) $-x^2+y^2=$ (x^2-y^2)；

(7) $(x-y)^3=$ $(y-x)^3$；

(8) $(1-x)(x-2)=$ $(x-1)(x-2)$.

2. 把下列各式分解因式(不要求像例4那样用 m 来表示公因式)：

(1) $a(x+y)+b(x+y)$；

(2) $6(p+q)^2-2(p+q)$；

(3) $2(x-y)^2-x(x-y)$；

(4) $m(a-b)-n(b-a)$；

(5) $3(y-x)^2+2(x-y)$；

(6) $m(m-n)^2-n(n-m)^2$；

(7) $mn(m-n)-m(n-m)^2$；

(8) $2x(x+y)^2-(x+y)^3$；

(9) $p(a^2+b^2)+q(a^2+b^2)-r(a^2+b^2)$；

(10) $2a(x+y-z)-3b(x+y-z)-5c(x+y-z)$.

3. 把下列各式先因式分解，再求值：

(1) $5x(m-2)-4x(m-2)$，其中 $x=0.4$，$m=5.5$；

(2) $4a^2(x+7)-3a^2(x+7)$，其中 $a=-5$，$x=3$.

习 题 8.1

A 组

1. 根据乘法运算

$$(m+4)(m-4)=m^2-16,$$
$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6,$$
$$(y-3)^2=y^2-6y+9,$$
$$(p-2)(p^2+2p+4)=p^3-8,$$

把下列多项式分解因式:

(1) m^2-16; (2) x^2+5x+6;

(3) y^2-6y+9; (4) p^3-8.

2. 把下列各式分解因式:

(1) $cx-cy+cz$; (2) $px-qx-rx$;

(3) $15a^3-10a^2$; (4) $12abc-3bc^2$;

(5) $4x^2y-xy^2$; (6) $63pq+14pq^2$;

(7) $24a^3m-18a^2m^2$; (8) x^6y-x^4z.

3. 填空:

(1) $14abx-8ab^2x+2ax=2ax$(_____);

(2) $-7ab-14abx+49aby=-7ab$(_____).

4. 把下列各式分解因式:

(1) $15x^3y^2+5x^2y-20x^2y^3$;

(2) $6m^2n-15mn^2+30m^2n^2$;

(3) $-16x^4-32x^3+56x^2$;

(4) $-4a^3b^2+6a^2b-2ab$.

5. 把下列各式分解因式:

(1) $x(a+b)-y(a+b)$;

(2) $5x(x-y)+2y(x-y)$;

(3) $6q(p+q)-4p(p+q)$;

(4) $(m+n)(p+q)-(m+n)(p-q)$;

(5) $a(a-b)+(a-b)^2$;

(6) $x(x-y)^2-y(x-y)$;

(7) $(2a+b)(2a-3b)-3a(2a+b)$;

(8) $x(x+y)(x+y)-x(x+y)^2$.

6. 把下列各式分解因式:

(1) $p(x-y)-q(y-x)$;

(2) $m(a-3)+2(3-a)$;

(3) $(a+b)(a-b)-(b+a)$;

(4) $a(x-a)+b(a-x)-c(x-a)$;

(5) $10a(x-y)^2-5b(y-x)$;

(6) $3(x-1)^3y-(1-x)^3z$;

(7) $x(a-x)(a-y)-y(x-a)(y-a)$;

(8) $-ab(a-b)^2+a(b-a)^2-ac(a-b)^2$.

B 组

1. 利用因式分解计算:

(1) $21\times3.14+62\times3.14+17\times3.14$;

(2) $2.186\times1.237-1.237\times1.186$.

2. 已知公式 $V=IR_1+IR_2+IR_3$,当 $R_1=19.7$, $R_2=32.4$, $R_3=35.9$, $I=2.5$ 时,利用因式分解求 V 的值.

8.2 运用公式法

能运用公式把简单的多项式进行因式分解.

我们知道，整式乘法与因式分解相反，因此，利用整式乘法与因式分解的这种关系，可以得到因式分解的方法.

如果把乘法公式反过来，就可以用来把某些多项式分解因式. 这种分解因式的方法叫做**运用公式法**.

1. 平方差公式

把乘法公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

反过来，就得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这就是说，两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积. 这个公式就是**平方差公式**. 运用这个公式，可以把形式是平方差的多项式分解因式.

看两个例子：把多项式 x^2-16 及 $9m^2-4n^2$ 分解因式. 它们能用提公因式法来分解吗？不能. 它们都能写成平方差的形式，由此可以用刚学过的平方差公式来试一试.

首先分析第一个例子. 要运用平方差公式把 x^2-16 分解因式,只要 x^2-16 具有平方差的形式. 因为 $16=4^2$, 所以 $x^2-16=x^2-4^2$, 它是 x 与 4 的平方差. 既然 x^2-16 确实具有平方差的形式, 那么就能够运用平方差公式来分解因式. 也就是说:

$$x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4).$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

其次看第二个例子. 因为 $9m^2=(3m)^2$, $4n^2=(2n)^2$, 所以 $9m^2-4n^2=(3m)^2-(2n)^2$, 而 $(3m)^2-(2n)^2$ 是 $3m$ 与 $2n$ 的平方差,那么它能够运用平方差公式来分解因式. 也就是说:

$$9m^2-4n^2=(3m)^2-(2n)^2=(3m+2n)(3m-2n).$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

值得指出的是:平方差公式中的字母 a, b 不仅可以表示数, 而且都可以表示代数式. 例如第二个例子中, 利用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 分解因式时, 其中 a 表示 $3m$, b 表示 $2n$.

下面再看一些例题.

例 1 把下列各式分解因式:

(1) $1-25b^2$; (2) $x^2y^2-z^2$;

(3) $\frac{4}{9}m^2-0.01n^2$.

解: (1) $1-25b^2$

$=1^2-(5b)^2$

$=(1+5b)(1-5b)$;

(2) $x^2y^2-z^2$

$=(xy)^2-z^2$

$=(xy+z)(xy-z)$;

(3) $\frac{4}{9}m^2-0.01n^2$

$=\left(\frac{2}{3}m\right)^2-(0.1n)^2$

$=\left(\frac{2}{3}m+0.1n\right)\left(\frac{2}{3}m-0.1n\right)$.

例 2 把下列各式分解因式:

(1) $(x+p)^2-(x+q)^2$;

(2) $16(a-b)^2-9(a+b)^2$.

分析:$(x+p)^2-(x+q)^2$是$x+p$与$x+q$的平方差;把式子$16(a-b)^2-9(a+b)^2$改写成$[4(a-b)]^2-[3(a+b)]^2$后,可以看出它是$4(a-b)$与$3(a+b)$的平方差,所以它们都可以运用平方差公式分解因式.

解：(1) $(x+p)^2-(x+q)^2$

$=[(x+p)+(x+q)][(x+p)-(x+q)]$

$=(2x+p+q)(p-q)$;

(2) $16(a-b)^2-9(a+b)^2$

$=[4(a-b)]^2-[3(a+b)]^2$

$=[4(a-b)+3(a+b)][4(a-b)-3(a+b)]$

$=(7a-b)(a-7b)$.

例 3 把下列各式分解因式：

(1) x^5-x^3；　　(2) x^4-y^4.

解：(1) x^5-x^3

$=x^3(x^2-1)$

$=x^3(x+1)(x-1)$;

(2) x^4-y^4

$=(x^2)^2-(y^2)^2$

$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

注意 (1) 如果多项式的各项含有公因式，那么先提出这个公因式，再进一步分解因式（如例 3 的第(1)小题）；

(2) 分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止（例 3 的第 (2)小题说明了这一点）.

练　习

1. 填空：

(1) $4x^2=(\quad)^2$；　(2) $25m^2=(\quad)^2$；

(3) $36a^4=(\quad)^2$；　(4) $0.49b^2=(\quad)^2$；

(5) $81n^6=(\quad)^2$；　(6) $\frac{9}{16}c^2=(\quad)^2$；

(7) $64x^2y^2=(\quad)^2$；　(8) $100p^4q^2=(\quad)^2$.

2. (口答)把下列各式分解因式：

(1) x^2-4；　(2) $9-y^2$；

(3) $1-a^2$；　(4) $4x^2-y^2$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $a^2-\frac{1}{9}x^2$；　(2) $36-m^2$；

(3) $4x^2-9y^2$；　(4) $0.81a^2-16b^2$；

(5) $36n^2-1$；　(6) $25p^2-49q^2$.

4. 下列多项式可不可以用平方差公式来分解因式？如果可以，应分解成什么式子？如果不可以，说明为什么.

(1) x^2+y^2；　(2) x^2-y^2；

(3) $-x^2+y^2$；　(4) $-x^2-y^2$.

5. 把下列各式分解因式：

(1) $4a^2-(b+c)^2$；　(2) $(3m+2n)^2-(m-n)^2$；

(3) $2ab^3-2ab$；　(4) x^3-16x；

(5) $1-a^4$；　(6) $-x^4+16$.

2. 完全平方公式

把乘法公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

反过来，就得到

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

这就是说，**两个数的平方和，加上(或者减去)这两个数的积的2倍，等于这两个数的和(或者差)的平方**. 因此，我们把 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 这样的式子叫做**完全平方式**，上面方框中的两个公式就是**完全平方公式**. 运用这两个公式，可以把形式是完全平方式的多项式分解因式.

看两个例子：把多项式 x^2+6x+9 及 $4x^2-20x+25$ 分解因式. 它们不能用提公因式法及平方差公式来分解. 我们分析一下它们是不是完全平方式.

多项式 x^2+6x+9 有三项，第一项 x^2 是 x 的平方，第三项9是3的平方，x^2+9 是 x、3的平方和，第二项 $6x$ 正好是 x 与3的积的2倍，所以 x^2+6x+9 是一个完全平方式.

多项式 $4x^2-20x+25$ 也有三项，第一项 $4x^2$ 是 $2x$ 的平方，第三项 25 是 5 的平方，$4x^2+25$ 是 $2x$、5 的平方和，第二项 $-20x$ 正好是 $2x$ 与 5 的积的 2 倍的相反数，所以 $4x^2-20x+25$ 也是一个完全平方式.

既然 x^2+6x+9 及 $4x^2-20x+25$ 都是完全平方式，那么它们都能够运用完全平方公式来分解因式. 也就是说：

$$x^2+6x+9=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2,$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2$$

$$4x^2-20x+25$$

$$=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5+5^2=(2x-5)^2.$$

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2$$

由上面的例子，使我们进一步认识到：

把完全平方式分解因式时，要根据第二项的符号来选择运用哪一个完全平方公式.

下面再看一些例题.

例 4 把 $25x^4+10x^2+1$ 分解因式.

解： $25x^4+10x^2+1$

$=(5x^2)^2+2\cdot 5x^2\cdot 1+1^2$

$=(5x^2+1)^2.$

例 5 把 $-x^2-4y^2+4xy$ 分解因式.

解：$-x^2-4y^2+4xy$

$=-(x^2+4y^2-4xy)$

$=-(x^2-4xy+4y^2)$

$=-[x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2]$

$=-(x-2y)^2$.

例 6 把 $3ax^2+6axy+3ay^2$ 分解因式.

解：$3ax^2+6axy+3ay^2$

$=3a(x^2+2xy+y^2)$

$=3a(x+y)^2$.

练 习

1. 把下列各式分解因式：

(1) x^2+2x+1；　　(2) $4a^2+4a+1$；

(3) $1-6y+9y^2$；　　(4) $1+m+\frac{m^2}{4}$.

2. 下列多项式是不是完全平方式？如果是，可以分解成什么式子？如果不是，说明为什么.

(1) x^2-4x+4；　　(2) $1+16a^2$；

(3) $4x^2+4x-1$；　　(4) x^2+xy+y^2.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2-12xy+36y^2$；　　(2) $25p^2+10pq+q^2$；

(3) $\frac{m^2}{9}+\frac{2mn}{3}+n^2$；　　(4) $a^2-14ab+49b^2$；

(5) $16a^4+24a^2b^2+9b^4$；　　(6) $(x+y)^2-10(x+y)+25$；

(7) $-2xy-x^2-y^2$；　　(8) $ax^2+2a^2x+a^3$.

3. 立方和与立方差公式

把乘法公式

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

反过来，就得到

$$\boxed{\begin{aligned} a^3+b^3&=(a+b)(a^2-ab+b^2),\\ a^3-b^3&=(a-b)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}}$$

这就是说，两个数的立方和（或者差），等于这两个数的和（或者差）乘以它们的平方和与它们的积的差（或者和）. 这两个公式分别就是立方和公式与立方差公式. 运用这两个公式，可以把形式是立方和或立方差的多项式分解因式.

注意，公式中的因式 a^2-ab+b^2 与 a^2+ab+b^2 都不是完全平方式.

看两个例子：把多项式 x^3+8 及 $27-8a^3$ 分解因式. 它们都提不出公因式，也不是平方差、完全平方的形式，为此我们分析一下它们是否具有立方和或立方差的形式.

因为 $8=2^3$，所以 $x^3+8=x^3+2^3$，它是 x 与 2 的立方和.

又因为 $27=3^3$, $8a^3=(2a)^3$, 所以 $27-8a^3=3^3-(2a)^3$, 它是 3 与 $2a$ 的立方差.

既然 x^3+8 及 $27-8a^3$ 分别具有立方和及立方差的形式, 那么它们分别能够运用立方和公式及立方差公式来分解因式. 也就是说:

$$\begin{aligned} x^3+8 &= x^3+2^3 = (x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2) \\ a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-a\cdot b+b^2) \\ &= (x+2)(x^2-2x+4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27-8a^3 &= 3^3-(2a)^3 = (3-2a)[3^2+3\cdot 2a+(2a)^2] \\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+a\cdot b+b^2) \\ &= (3-2a)(9+6a+4a^2). \end{aligned}$$

注意, 在运用立方和公式或立方差公式分解因式时, 一定要弄准因式中各项的符号. 下面再看一些例题.

例 7 把下列各式分解因式:

(1) $27-x^6$; (2) $1+\frac{a^3b^3}{8}$.

解: (1) $27-x^6=3^3-(x^2)^3$

$$=(3-x^2)[3^2+3\cdot x^2+(x^2)^2]$$

$$=(3-x^2)(9+3x^2+x^4);$$

(2) $1+\frac{a^3b^3}{8}$

$=1^3+\left(\frac{ab}{2}\right)^3$

$=\left(1+\frac{ab}{2}\right)\left[1^2-1\cdot\frac{ab}{2}+\left(\frac{ab}{2}\right)^2\right]$

$=\left(1+\frac{ab}{2}\right)\left(1-\frac{ab}{2}+\frac{a^2b^2}{4}\right)$.

例8 把 $x-xy^3$ 分解因式.

解: $x-xy^3$

$=x(1-y^3)$

$=x(1-y)(1+y+y^2)$.

练 习

1. 填空:

(1) $64a^3=(\quad)^3$; (2) $125n^6=(\quad)^3$;

(3) $0.001x^3=(\quad)^3$; (4) $-27a^3b^3=(\quad)^3$.

2. 把下列各式分解因式:

(1) a^3+1; (2) $1-m^3$;

(3) $8p^3-q^3$; (4) $27+x^3$;

(5) $1-27y^3$; (6) $125m^3+8n^3$;

(7) p^6-64q^3; (8) $m^3n^3-\frac{1}{125}$.

3. 把下列各式分解因式:

(1) $81+3x^3$; (2) y^4-8y;

(3) $-27-a^3$; (4) $m^4-\frac{m}{64}$.

习 题 8.2

A 组

把下列各式分解因式（第 1 ～ 3 题）：

1. (1) a^2-49;　　(2) $64-x^2$;
   (3) $1-36b^2$;　　(4) m^2-81n^2;
   (5) $0.49p^2-144q^2$;　　(6) $121x^2-4y^2$;
   (7) $a^2p^2-b^2q^2$;　　(8) $\frac{25}{4}a^2-x^2y^2$.

2. (1) $(m+n)^2-n^2$;
   (2) $169(a-b)^2-196(a+b)^2$;
   (3) $(2x+y)^2-(x+2y)^2$;
   (4) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$;
   (5) $4(2p+3q)^2-(3p-q)^2$;
   (6) $(x^2+y^2)^2-x^2y^2$.

3. (1) $81a^4-b^4$;　　(2) $8y^4-2y^2$;
   (3) $3ax^2-3ay^4$;　　(4) m^4-1.

把下列各式分解因式（第 4 ～ 8 题）：

4. (1) x^2-2x+1;　　(2) $a^2+8a+16$;
   (3) $1-4t+4t^2$;　　(4) $m^2-14m+49$;
   (5) $b^2-22b+121$;　　(6) $y^2+y+\frac{1}{4}$.

5. (1) $25m^2-80m+64$;　　(2) $4a^2+36a+81$;
   (3) $4p^2-20pq+25q^2$;　　(4) $\frac{x^2}{4}+xy+y^2$.

6. (1) $25a^4-40a^2b^2+16b^4$;

(2) $36x^4-12x^2y+y^2$;

(3) $a^2b^2-4ab+4$;

(4) $16-8xy+x^2y^2$.

7. (1) $(x+y)^2+6(x+y)+9$;

(2) $a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$;

(3) $4-12(x-y)+9(x-y)^2$;

(4) $(m+n)^2+4m(m+n)+4m^2$.

8. (1) $2xy-x^2-y^2$;

(2) $4xy^2-4x^2y-y^3$;

(3) $3-6x+3x^2$;

(4) $-a+2a^2-a^3$.

把下列各式分解因式(第9～12题):

9. (1) x^3-y^3;　　(2) x^3+125;

(3) a^3+8b^3;　　(4) $27m^3-n^3$.

10. (1) $1-\frac{1}{8}a^3$;　　(2) $0.064p^3+1$;

(3) x^3y^3-27;　　(4) p^3-q^6.

11. (1) $(a+b)^3+c^3$;　　(2) $(2x+1)^3-x^3$;

(3) $-a-a^4$;　　(4) $3x^3+24$.

12. (1) $x^5-x^3y^2$;

(2) $16x^5+8x^3y^2+xy^4$;

(3) x^4+xy^3;

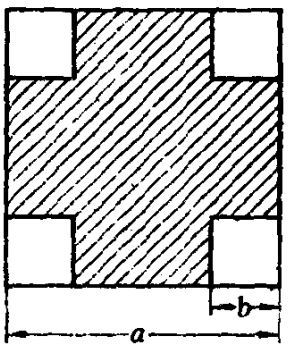
(4) $16x^4-y^4$.

B 组

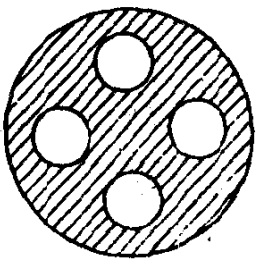
1. 利用因式分解计算:

   (1) 758^2-258^2;　　(2) 429^2-171^2.

2. 如图，在一块边长为 a 厘米的正方形纸板的四角，各剪去一个边长为 $b\left(b<\frac{a}{2}\right)$ 厘米的正方形，利用因式分解计算当 $a=13.2, b=3.4$ 时剩余部分的面积.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上，冲去半径为 r 的四个小圆，利用因式分解计算当 $R=7.8$ 厘米，$r=1.1$ 厘米时剩余部分的面积 (π 取 3.14，结果保留三个有效数字).

4. 已知 $y^2-2my+1$ 是完全平方式，求 m 的值.

5. 先把下列各式分解因式，然后指出每道小题中几个式子的公因式:

   (1) x^2-4y^2 与 $x^2+4xy+4y^2$;

   (2) $9x^2-24x+16$, $27x^3-64$ 与 $9x^2-16$.

8.3 分组分解法

> 能用分组分解法把分组后可以直接提公因式或运用公式的多项式进行因式分解.

1. 分组后能直接提公因式

现在我们回过来看本书第 2 页的下半部分. 这三个式子的关系告诉我们, 要把多项式 (即第三个式子)

$$am+an+bm+bn$$

分解因式 (最后结果是第一个式子 $(a+b)(m+n)$),可以先把它的前两项分成一组, 并提出公因式 a; 把它的后两项分成另一组,并提出公因式 b. 从而得到 (第二个式子)

$$a(m+n)+b(m+n).$$

这时, 由于 $a(m+n)$与 $b(m+n)$又有公因式 $m+n$,于是可提出 $m+n$. 从而得到 (第一个式子)

$$(a+b)(m+n).$$

这种利用分组来分解因式的方法叫做**分组分解法**. 从上面的说明可以看出,如果把一个多项式的项分组并提出公因式后, 它们的另一个因式正好相同, 那么这个多项式就可以用分组分解法来分解因式.

例 1　把 $a^2-ab+ac-bc$ 分解因式.

分析：把这个多项式的四项按前两项与后两项分成两组，分别提出公因式 a 与 c 后，另一个因式正好都是 $a-b$. 这样就可继续提公因式.

解：$a^2-ab+ac-bc$

$=(a^2-ab)+(ac-bc)$

$=a(a-b)+c(a-b)$

$=(a-b)(a+c)$.

例 2　把 $2ax-10ay+5by-bx$ 分解因式.

分析：把这个多项式的四项按前两项与后两项分成两组，并使两组的项都按 x 的降幂排列，然后从两组分别提出公因式 $2a$ 与 $-b$，这时，另一个因式正好都是 $x-5y$. 这样就可继续提公因式.

解：$2ax-10ay+5by-bx$

$=(2ax-10ay)+(5by-bx)$

$=(2ax-10ay)+(-bx+5by)$

$=2a(x-5y)-b(x-5y)$

$=(x-5y)(2a-b)$.

想一想：例 1、例 2 中还有没有其他分组的办法；如果有其他办法，因式分解的结果是不是一样.

用分组分解法时，一定要想想分组后能否继续进行，完成因式分解，由此合理选择分组的方法.

例 3　把 $3ax+4by+4ay+3bx$ 分解因式.

分析：如果把这个多项式的四项按前两项与后两项分组，无法分解因式. 但如果把第一、三两项作为一组，第四、二两项作为另一组，分别提出公因式 a 与 b 后，另一个因式正好都是 $3x+4y$.

解：$3ax+4by+4ay+3bx$

$=3ax+4ay+3bx+4by$

$=(3ax+4ay)+(3bx+4by)$

$=a(3x+4y)+b(3x+4y)$

$=(3x+4y)(a+b)$.

例 4　把 $m^2+5n-mn-5m$ 分解因式.

解：$m^2+5n-mn-5m$

$=m^2-5m-mn+5n$

$=(m^2-5m)+(-mn+5n)$

$=m(m-5)-n(m-5)$

$=(m-5)(m-n)$.

想一想：例 3、例 4 中还有没有其他分组的办法，如果有，因式分解的结果是不是一样.

由例 3、例 4 可以看出：分组时运用了加法结合律；而为了合理分组（能因式分解），我们先运用了加法交换律. 分组后，为了提公因式，又运用了分配律. 由此可以看出运算律在因式分解中所起的作用.

练　习

把下列各式分解因式：

1. (1) $20(x+y)+x+y$；　(2) $p-q+k(p-q)$；

   (3) $5m(a+b)-a-b$；　(4) $2m-2n-4x(m-n)$.

2. (1) $ac+bc+2a+2b$；　(2) $a^2+ab-ac-bc$；

   (3) $3a-ax-3b+bx$；　(4) $xy-y^2-yz+xz$.

3. (1) $5ax+6by+5ay+6bx$；　(2) $4x^2+3z-3xz-4x$.

2. 分组后能直接运用公式

例5　把 $x^2-y^2+ax+ay$ 分解因式.

分析：把第一、二两项作为一组，这两项虽然没有公因式，但可以运用平方差公式分解因式，其中一个因式是 $x+y$；把第三、四两项作为另一组，在提出公因式 a 后，另一个因式也是 $x+y$.

解：$x^2-y^2+ax+ay$

$=(x^2-y^2)+(ax+ay)$

$=(x+y)(x-y)+a(x+y)$

$=(x+y)[(x-y)+a]$

$=(x+y)(x-y+a)$.

例6　把 $a^2-2ab+b^2-c^2$ 分解因式.

分析：把前三项作为一组，它是一个完全平方式，可以分解成 $(a-b)^2$；把第四项 $-c^2$ 作为另一组，那么 $(a-b)^2-c^2$ 是平方差形式的多项式，可继续分解因式.

解：$a^2-2ab+b^2-c^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-c^2$

$=(a-b)^2-c^2$

$=[(a-b)+c][(a-b)-c]$

$=(a-b+c)(a-b-c)$.

从例5、例6可以看出：如果把一个多项式的项分组后，各组都能直接运用公式或提公因式进行分解，并且各组在分解后，它们之间又能运用公式或有公因式，那么这个多项式也可以用分组分解法来分解因式.

例7 把 $x^3+x^2y-xy^2-y^3$ 分解因式.

解：$x^3+x^2y-xy^2-y^3$

$=(x^3+x^2y)-(xy^2+y^3)$

$=x^2(x+y)-y^2(x+y)$

$=(x+y)(x^2-y^2)$

$=(x+y)[(x+y)(x-y)]$

$=(x+y)^2(x-y)$.

练 习

把下列各式分解因式：

1. $4a^2-b^2+6a-3b$.
2. $9m^2-6m+2n-n^2$.
3. $x^2-y^2-z^2+2yz$.
4. $x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

习 题 8.3

A 组

把下列各式分解因式：

1. (1) $am+an+bm+bn$;
   (2) $xy-xz+y-z$;
   (3) $a^2+ab+ac+bc$;
   (4) $ax-2bx+ay-2by$;
   (5) $4xy-3xz+8y-6z$;
   (6) x^3+3x^2+3x+9.
2. (1) $3xy-2x-12y+8$;
   (2) $ab-5bc-2a^2+10ac$;
   (3) $5ax+7ay-5bx-7by$;
   (4) $x^3y+3x-2x^2y^2-6y$.
3. (1) $6ax+15b^2y^2-6b^2x-15ay^2$;
   (2) $7x^2-3y+xy-21x$;
   (3) $3a^2+bc-3ac-ab$;
   (4) $a^2m+bn-an-abm$.
4. (1) $x^2-a^2-2x-2a$;
   (2) a^3-b^3-a+b;
   (3) $4x^2-4xy+y^2-a^2$;
   (4) $1-m^2-n^2+2mn$.
5. (1) $a-a^3$;　　(2) x^3y-xy^3;
   (3) $x+x^4$;　　(4) a^4b-ab^4.

6. (1) $4x^2-y^2+2x-y$;

(2) a^4+a^3+a+1;

(3) $x^4y+2x^3y^2-x^2y-2xy^2$;

(4) $x^3-8y^3-x^2-2xy-4y^2$.

B 组

1. 把 $(z^2-x^2-y^2)^2-4x^2y^2$ 分解因式.
2. 把 $x^2-11x+24$ 中的 $-11x$ 拆成两项，然后用分组分解法证明

$$x^2-11x+24$$

$$=(x-3)(x-8).$$

3. 把 x^4+4 改写成 x^4+0+4 (即添上一项“0”)，再把 0 拆成两项 (想一想：这样的两项应该具备什么特点)，然后用分组分解法证明

$$x^4+4$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

4. 仿照第 3 题，通过添 0 (即添加辅助项)、拆 0 (即一分为二)的思想和分组分解的方法证明

$$4x^4+1$$

$$=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1).$$

8.4 十字相乘法

1. 能用十字相乘法把某些二次三项式进行因式分解.
2. 能灵活运用提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法进行多项式的因式分解.

我们知道，

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6,$$

反过来，就得到二次三项式 x^2+5x+6 的因式分解形式，即

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3),$$

其中常数项 6 分解成 2，3 两个因数的积，而且这两个因数的和等于一次项的系数 5，即 $6=2\times3$，且 $2+3=5$.

一般地，由多项式乘法，

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$

反过来，就得到

$$\boxed{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).}$$

这就是说，对于二次三项式 x^2+px+q，如果能够把常数项 q 分解成两个因数 a,b 的积，并且 $a+b$ 等于一次项的系数 p，那么它就可以分解因式，即

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

运用这个公式，可以把某些二次项系数为 1 的二次三项式分解因式.

例 1 把 x^2+3x+2 分解因式.

分析：这里，常数项 2 是正数，所以分解成的两个因数必是同号，而 $2=1\times2=(-1)\times(-2)$，要使它们的代数和等于 3，只需取 1，2 即可.

解：因为 $2=1\times2$，并且 $1+2=3$，所以

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

例 2 把 x^2-7x+6 分解因式.

分析：这里，常数项是正数，所以分解成的两个因数必是同号，而 $6=1\times6=(-1)\times(-6)=2\times3=(-2)\times(-3)$，要使它们的代数和等于 -7，只需取 -1，-6 即可.

解：因为 $6=(-1)\times(-6)$，并且 $(-1)+(-6)=-7$，所以

$$\begin{aligned}x^2-7x+6&=[x+(-1)][x+(-6)]\\&=(x-1)(x-6).\end{aligned}$$

例 3 把 $x^2-4x-21$ 分解因式.

分析：这里，常数项是负数，所以分解成的两个因数必是异号，-21 可以分解成 1 与 -21，或者 -1 与 21，或者 3 与 -7，或者 -3 与 7 的积. 其中只需取 3 与 -7，其和 $3+(-7)$ 等于一次项的系数 -4.

解：$x^2-4x-21$

$$\begin{aligned}&=(x+3)[x+(-7)]\\&=(x+3)(x-7).\end{aligned}$$

例 4 把$x^2+2x-15$分解因式.

解: 因为 $-15=(-3)\times 5$, 并且$(-3)+5=2$, 所以

$$\begin{aligned}&x^2+2x-15\\&=[x+(-3)](x+5)\\&=(x-3)(x+5).\end{aligned}$$

通过例1～4可以看出,**把 x^2+px+q 分解因式时:**

如果常数项 q 是正数,那么把它分解成两个同号因数,它们的符号与一次项系数 p 的符号相同;

如果常数项 q 是负数,那么把它分解成两个异号因数,其中绝对值较大的因数与一次项系数 p 的符号相同.

对于分解的两个因数, 还要看它们的和是不是等于一次项的系数p.

例 5 把下列各式分解因式:

(1) x^4+6x^2+8; (2) $(a+b)^2-4(a+b)+3$.

解: (1) x^4+6x^2+8

$$\begin{aligned}&=(x^2)^2+6(x^2)+8\\&=[(x^2)+2][(x^2)+4]\\&=(x^2+2)(x^2+4);\end{aligned}$$

(2) $(a+b)^2-4(a+b)+3$

$$\begin{aligned}&=[(a+b)-1][(a+b)-3]\\&=(a+b-1)(a+b-3).\end{aligned}$$

例 6 把 $x^2-3xy+2y^2$ 分解因式.

分析：把 $x^2-3xy+2y^2$ 看成 x 的二次三项式，这时，常数项是 $2y^2$，一次项系数是 $-3y$. 把 $2y^2$ 分解成 $-y$ 与 $-2y$ 的积，$(-y)+(-2y)=-3y$，正好等于一次项系数.

解：$x^2-3xy+2y^2$

$=x^2-3yx+2y^2$

$=(x-y)(x-2y)$.

例 7 把 $x^4-3x^3-28x^2$ 分解因式.

解：$x^4-3x^3-28x^2$

$=x^2(x^2-3x-28)$

$=x^2(x+4)(x-7)$.

练 习

把下列各式分解因式：

1. (1) x^2+4x+3; (2) $a^2+7a+10$;
   (3) $y^2-7y+12$; (4) q^2-6q+8;
   (5) x^2+x-20; (6) $m^2+7m-18$;
   (7) $p^2-5p-36$; (8) t^2-2t-8.
2. (1) x^4-x^2-20; (2) $a^2x^2+7ax-8$.
3. (1) $a^2-9ab+14b^2$; (2) $x^2+11xy+18y^2$.
4. (1) $x^2y^2-5x^2y-6x^2$; (2) $-a^3-4a^2+12a$.

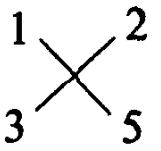
我们知道，

$$(x+2)(3x+5)=3x^2+11x+10.$$

反过来，就得到 $3x^2+11x+10$ 的因式分解的形式，即

$$3x^2+11x+10=(x+2)(3x+5).$$

我们发现，二次项的系数 3 分解成 1，3 两个因数的积；常数项 10 分解成 2，5 两个因数的积；当我们把 1，3，2，5 写成



后，发现 $1\times5+2\times3$ 正好等于一次项的系数 11.

由上面例子启发我们，应该如何把二次三项式 ax^2+bx+c 进行因式分解.

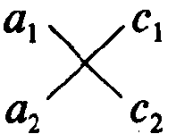
我们知道，

$$\begin{aligned}&(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)\\&=a_1a_2x^2+a_1c_2x+a_2c_1x+c_1c_2\\&=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2,\end{aligned}$$

反过来，就得到

$$\begin{aligned}&a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2\\&=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2).\end{aligned}$$

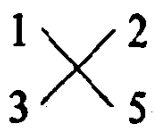
我们发现，二次项的系数 a 分解成 a_1a_2，常数项 c 分解成 c_1c_2，并且把 a_1，a_2，c_1，c_2 排列如下：



这里按斜线交叉相乘，再相加，就得到 $a_1c_2+a_2c_1$，如果它正好等于 ax^2+bx+c 的一次项系数 b，那么 ax^2+bx+c 就可以分解成 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$，其中 a_1，c_1 位于上图的上一行，a_2，c_2 位于下一行.

像这种借助画十字交叉线分解系数，从而帮助我们把二次三项式分解因式的方法，通常叫做**十字相乘法**.

必须注意，分解因数及十字相乘都有多种可能情况，所以往往要经过多次尝试，才能确定一个二次三项式能否用十字相乘法分解. 例如在上面例子的二次三项式 $3x^2+11x+10$ 中，二次项的系数 3 可以分解成 1 与 3，或者 -1 与 -3 的积，常数项 10 可以分解成 1 与 10，或者 -1 与 -10，或者 2 与 5，或者 -2 与 -5 的积，其中只要选取十字



相乘就可以了.

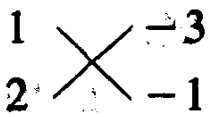
例 8 把下列各式分解因式:

(1) $2x^2-7x+3$; (2) $6x^2-7x-5$;

(3) $5x^2+6xy-8y^2$.

解: (1) $2x^2-7x+3$

$=(x-3)(2x-1)$;

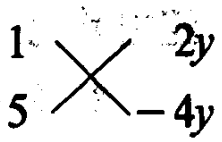


(2) $6x^2-7x-5$

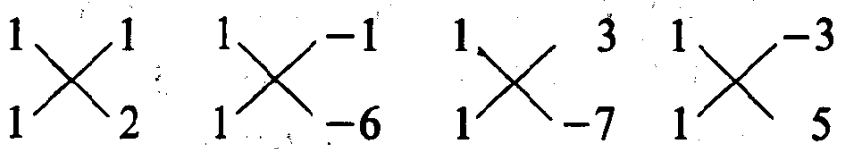
$=(2x+1)(3x-5)$;

(3) $5x^2+6xy-8y^2$

$=(x+2y)(5x-4y)$.



另外,我们也可以用十字相乘法把二次三项式x^2+px+q分解因式. 例 1 ~ 4 的十字分别是:



可以看出,这四个十字左边两个数都是 1. 因此在把x^2+px+q分解因式时,不画十字也可以.

练 习

把下列各式分解因式:

1. (1) $2x^2+15x+7$; (2) $3a^2-8a+4$;

   (3) $5x^2+7x-6$; (4) $6y^2-11y-10$.

2. (1) $5a^2b^2+23ab-10$;

   (2) $3a^2b^2-17abxy+10x^2y^2$.

现在，我们可以作一个归纳，把一个多项式分解因式，一般可按下列步骤进行：

1. 如果多项式的各项有公因式，那么先提公因式；

2. 如果各项没有公因式，那么可以尝试运用公式来分解；

3. 如果用上述方法不能分解，那么可以尝试用分组或其他方法（例如十字相乘法）来分解；

4. 分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

例如，把 $4x^4y^2-5x^2y^2-9y^2$ 分解因式.

各项有公因式 y^2，先把它提出来，得到

$$4x^4y^2-5x^2y^2-9y^2=y^2(4x^4-5x^2-9). \qquad ①$$

因式 $4x^4-5x^2-9$ 还能分解吗？可以用十字相乘法试一试，行了，得到

$$4x^4y^2-5x^2y^2-9y^2=y^2(x^2+1)(4x^2-9). \qquad ②$$

因式 $4x^2-9$ 还能用平方差公式分解.所以

$$\begin{aligned}&4x^4y^2-5x^2y^2-9y^2\\&=y^2(x^2+1)(2x+3)(2x-3). \qquad ③\end{aligned}$$

再检查一下，$x^2+1, 2x+3, 2x-3$ 都不能再分解了. 这时我们可以说，③ 式就是把原式分解因式的最后结果.

习 题 8.4

A 组

把下列各式分解因式：

1. (1) x^2+9x+8;　(2) $x^2-10x+24$;
(3) $x^2+3x-10$;　(4) $x^2-3x-28$;
(5) $a^2+4a-21$;　(6) $m^2+4m-12$;
(7) p^2-8p+7;　(8) $b^2+11b+28$.

2. (1) x^4+7x^2-18;　(2) x^6+8x^3+15;
(3) $m^2x^2-8mx+12$;　(4) $x^2y^2-7xy+10$.

3. (1) $x^2-7xy+12y^2$;　(2) $a^2+2ab-15b^2$;
(3) $m^2+4mn-12n^2$;　(4) $p^2+9pq+18q^2$.

4. (1) $-x^2y+6xy-8y$;
(2) $(m+n)^2-(m+n)-30$;
(3) $ab^2+4abc+3ac^2$;
(4) $(x-y)^2-3(x-y)-40$.

5. (1) x^3-15x^2-16x;　(2) $1-26a^2+25a^4$;
(3) $(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8$;
(4) a^6+7a^3-8;
(5) $(x+y)^4+(x+y)^2-20$;
(6) $5x^5-15x^3y-20xy^2$.

6. (1) $2x^2+3x+1$;　(2) $2y^2+y-6$;
(3) $6x^2-13x+6$;　(4) $3a^2-7a-6$;
(5) $6x^2-11xy+3y^2$;　(6) $4m^2+8mn+3n^2$.

B 组

1. 把下列各式分解因式:

(1) $4n^2+4n-15$; (2) $6l^2+l-35$;

(3) $10x^2-21xy+2y^2$; (4) $8m^2-22mn+15n^2$.

2. 先把下列各式分解因式,然后指出每道小题中几个式子的公因式:

(1) $x^2+9x+14$, x^3-49x 与 $x^2+2x-35$;

(2) $x^2+2x-63$, $x^2+18x+81$ 与 $x^2+12x+27$.

想一想

运用本小节的知识,还能把一些较复杂的多项式分解因式. 例如,把 $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$ 分解因式. 如果设 $x^2+3x=y$, 那么

$$(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$$

$$=(y-2)(y+4)-16=y^2+2y-24=(y+6)(y-4),$$

将 $y=x^2+3x$ 代回上式, 得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x^2+3x+6)(x^2+3x-4)\\&=(x^2+3x+6)(x-1)(x+4).\end{aligned}$$

试用这种方法把下列多项式分解因式:

(1) $(x^2+5x+3)(x^2+5x-2)-6$;

(2) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$.

用配方法分解二次三项式

读一读

对于某些二次三项式 ax^2+bx+c，除了可以用十字相乘法分解因式以外，还可以用“配方法”来分解，其中要用到完全平方公式、平方差公式以及添项、拆项的技巧（这里运用完全平方公式“配”出一个完全平方，是配方法的关键；“添项、拆项”是指先添一个0，再把0拆成绝对值相同、符号相反的两项，也就是先加上一个适当的项，再减去这个项，其目的也是为了配方）. 例如，把 $x^2+6x-16$ 分解因式，我们可以这样进行：

$x^2+6x-16$

$=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2-16$　　（加上 3^2，再减去 3^2）

$=(x+3)^2-5^2$　　（运用完全平方公式）

$=(x+3+5)(x+3-5)$　　（运用平方差公式）

$=(x+8)(x-2)$.　　（化简）

可以看出，这与十字相乘法得到的结果是一致的.

又例如，把 $2x^2+x-3$ 分解因式，我们可以这样进行：

$$2x^2+x-3$$

$$=2\left[x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right] \quad \text{(先提出二次项系数)}$$

$$=2\left[x^2+2\cdot\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{2}\right]$$

$$\left(\text{加上}\left(\frac{1}{4}\right)^2,\text{再减去}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$$

$$=2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right] \quad \text{(运用完全平方公式)}$$

$$=2\left(x+\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right) \text{(运用平方差公式)}$$

$$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1) \quad \text{(化简)}$$

$$=(2x+3)(x-1).$$

可以看出，这与用十字相乘法得到的结果一致：

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ & \times & \\ 2 & & 3 \end{array}$$

配方法是代数变形时常用的一种重要方法，我们在今后会继续学到.

练　习

用配方法把下列二次三项式分解因式：

1. $x^2-8x+12$.
2. x^2-7x+6.
3. $4x^2+8x-5$.
4. $8x^2+10x+2$.

小结与复习

一、内容提要

1. 本章的内容是因式分解的意义和把多项式分解因式的四种基本方法.

2. 学习多项式的因式分解,要知道因式分解与整式乘法的区别和联系.整式乘法是把几个整式相乘,化为一个多项式;而因式分解是把一个多项式化为几个因式相乘.例如,把 $(a+b)(a-b)$ 化为 a^2-b^2,是整式乘法;把 a^2-b^2 化为 $(a+b)(a-b)$,是因式分解. 这就是说,

$$(a+b)(a-b) \underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}} a^2-b^2.$$

知道了这种区别和联系,不仅可以明白因式分解的意义,而且也可以把整式乘法的过程反过来,从而得到分解因式的一些基本方法.

3. 把多项式分解因式,有以下几种基本方法:

(1) 提公因式法.这是分解因式最基本的方法.只要多项式的各项有公因式,首先把它提出来.

(2) 运用公式法. 这种方法的关键是熟悉公式.这些公式都是把乘法公式反过来得到的.

本章学习了五个公式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2,$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

(3) 分组分解法. 这种方法的关键是把各项适当分组，先使因式分解能分组进行，再使因式分解能在各组之间进行，并且一直进行到底. 我们在本章中已学习了分组后能直接提公因式及分组后能运用公式这两种情况.

(4) 十字相乘法. 用这种方法能把某些二次三项式 ax^2+bx+c 分解因式. 这种方法的关键是把二次项系数 a 分解成两个因数 a_1，a_2 的积 a_1a_2，把常数项 c 分解成两个因数 c_1，c_2 的积 c_1c_2，使 $a_1c_2+a_2c_1$ 正好等于一次项系数 b，那么可以直接写出结果 $ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$. 当然，用这种方法时，要经过多次观察和尝试.

特别地，当二次项系数为 1 时，如果能把常数项 q 分解成两个因数 a，b 的积，使 $a+b$ 正好等于一次项系数 p，那么可以直接写出 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$.

在分解因式时，要灵活运用上述方法，并且要把每一个多项式因式都分解到不能再分解为止.

二、学习要求

1. 能说出因式分解的意义,因式分解与整式乘法的区别和联系,并能举出例子.

2. 学会提公因式法(字母的指数是数字)、运用公式法(直接用公式不超过两次)、分组分解法(分组后能直接提公因式或运用公式)和十字相乘法(二次项系数与常数项的积为绝对值不大于60的正整数)这四种分解因式的基本方法,能灵活运用它们进行因式分解.

3. 能说出因式分解的一般步骤.

三、需要注意的几个问题

1. 什么时候用整式乘法,什么时候用因式分解,是根据需要而决定的.例如,把$(x-1)(x-2)-6$分解因式,必须先做整式乘法,得

$$\begin{aligned}&(x-1)(x-2)-6\\=&(x^2-3x+2)-6=x^2-3x-4\\=&(x-4)(x+1).\end{aligned}$$

又如,计算$(x+a)^2-(x-a)^2$时,通常不是按照运算顺序先做整式乘法,而是先进行因式分解,得

$$\begin{aligned}&(x+a)^2-(x-a)^2\\=&[(x+a)+(x-a)][(x+a)-(x-a)]\\=&2x\cdot 2a=4ax.\end{aligned}$$

2. 本章所说的因式分解,都是在有理数范围内进行的,要求因式中每个系数(包括常数项)都是有理数,并且分解到不能再分解为止.

复 习 题 八

A 组

1. ❶ 用字母分别表示加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律与分配律，并各举一个数的例子加以验证.
2. 如果 $a\neq 0$，那么 a 的相反数是什么？a 的倒数是什么？a 的绝对值是什么？举例说明.
3. 计算：

(1) $-\left[-\frac{1}{7}+\left(-\frac{1}{6}-0.25\times\frac{2}{3}\right)\div 2\frac{1}{3}\right]\times 6$;

(2) $\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{5}\right)\right]\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)^2\right]$;

(3) $\frac{7}{9}\times(-3)^3-\frac{1}{6}\times(-3)^2+\frac{1}{12}\times(-3)$;

(4) $8.954^3-7.308^3-26.54^2+37.69^2$(查表计算，精确到0.1).

4. (1) a 是不是一定大于 $-a$？举例说明.

(2) $\frac{a}{2}$ 是不是一定小于 a？举例说明.

(3) $a+b$ 是不是一定大于 $a-b$？举例说明.

(4) 已知 $a^2=b^2$，能不能断定 $a=b$？举例说明.

(5) 已知 $a>b$，能不能断定 $|a|>|b|$？举例说明.

(6) $|a|+a^2$ 是不是一定大于0？

---

❶ 第1～15题供复习《代数》第一册中学过的内容，可以在学习本册的过程中，根据情况选用.

5. 已知 n 是正整数:

(1) $2n$ 是奇数还是偶数? $2n-1$ 呢? $2n+1$ 呢?

(2) 计算 $(-1)^{2n},(-1)^{2n-1},(-a)^{2n},(-a)^{2n+1}$ 的值.

6. (1) 等式有哪几条性质? 举例说明.

(2) 不等式有哪几条基本性质? 举例说明.

(3) 什么是解方程、解不等式时的移项法则? 举例说明.

7. 解下列方程:

(1) $3\left\{x-\frac{3x-1}{4}-\left[1-2\left(x-\frac{3+x}{5}\right)\right]\right\}=5x-2;$

(2) $\frac{1}{2}(x^2-2x+1)-\frac{5}{6}(x^2+4x+4)$

$+\frac{1}{3}(x^2-6x+9)=0.$

8. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases}\frac{7x-3y}{5}=\frac{5x-y}{3}-\frac{x+y}{2},\\ 3(x-1)=5(y+1);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{3x-2y}{6}+\frac{2x+3y}{7}=1,\\ \frac{3x-2y}{6}-\frac{2x+3y}{7}=5;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x+14=4y+6z,\\ 7y+24=2z+8x,\\ 5z-1=2x+3y;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}y+z=2a,\\ z+x=2b,\\ x+y=2c\end{cases}$ (a, b, c 为已知数).

9. 列出方程组解应用题:把一个长方形的长增加 4cm,宽减少 1cm,它的面积不变;把它的长减少 2cm,宽增加 1cm,它的面积也不变.求这个长方形的面积.

10. 已知等式 $y=x^3+px^2+qx+r=0$,当 x 的值分别等于 1,2,3 时,y 的值都为 0.求 p,q,r 的值.

11. 解不等式:

(1) $16-3(2x-5)<25-4x$;

(2) $5(x-1)-6(x-2)>0$;

(3) $\frac{1}{5}(x+2)-\frac{1}{3}(x-1)<0$;

(4) $-4x\geqslant -20$(求正整数解).

12. (1) 已知 $a\neq b$,判断 $(a-b)^2$ 是正还是负;

(2) 已知 $a\neq b$,求证 $a^2+b^2>2ab$.

13. 已知 $A=x^3-x+6$,$B=x^3-x^2+x+3$,计算:

(1) $(A-x^3)(B-x^3)$; (2) $(A-B)^2$.

14. 化简:

(1) $(x-1)(x+4)-\{(x+2)(x-5)-[(x+3)(x-4)-(x-1)(x+6)]\}$;

(2) $(2x^2-6x+5)^2-(2x^2-6x+4)^2-(2x+3)^2$.

15. 先化简,再求值:

(1) $(x^2-xy+y^2)^2(x^2+xy+y^2)^2(x-y)^2(x+y)^2$,其中 $x=2,y=1$;

(2) $(a^8+b^8)(a+b)(a^4+b^4)(a-b)(a^2+b^2)$,其中 $a=1$,$b=-10$.

* * *

16. (1) 说出多项式因式分解的意义;

(2) 说出多项式因式分解的一般步骤.

把下列各式分解因式(第 17 ~ 21 题):

17. (1) x^2-64; (2) x^3-64;

(3) x^4+64x; (4) x^4-64x^2;

(5) $(a-b)(x-y)-(b-a)(x+y)$;

(6) $x(p-q)-y(p-q)+z(q-p)$;

(7) $25(x+y)^2-16(x-y)^2$;

(8) $p^2(p+q)^2-q^2(p-q)^2$;

(9) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$;

(10) $(a+b)^2+2(a+b)-15$.

18. (1) m^3n^3+27; (2) $1-\frac{1}{64}a^3$;

(3) $4-(3a+2b)^2$; (4) $(x^2+4)^2-16x^2$;

(5) $(3a-4b)(7a-8b)+(11a-12b)(7a-8b)$;

(6) $x^3z-4x^2yz+4xy^2z$;

(7) $(x+2)(x+3)+x^2-4$;

(8) $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$;

(9) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z\right)^2$;

(10) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$.

19. (1) x^2-4y^2+x+2y; (2) $x^2-6x+9-y^2$;

(3) $a^3x^2-c^3x^2-a^3y^2+c^3y^2$;

(4) $x^5-x^3+x^2-1$;

(5) $10a^2x+21xy^2-14ax^2-15ay^2$.

20. (1) $x^2-xy-30y^2$; (2) $a^2x^2+16ax+64$;

(3) $a^4-5a^2b^2+4b^4$; (4) $x^5-x^3y^2-12xy^4$;

(5) $(x+y)^2-14y(x+y)+49y^2$;

(6) $3x^2+x-2$; (7) $20y^2+y-1$;

(8) $7p^2-5pq-2q^2$; (9) $6x^2-5xy-6y^2$;

(10) $30a^2-ab-b^2$.

21. (1) $ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)$;

(2) $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

B 组

把下列各式分解因式(第 1 ～ 2 题):

1. (1) $a^{m+1}+a^m$; (2) $y^{n+2}-y^n$;

(3) $(a-b)^{n+2}-(a-b)^n$; (4) $x^{n+1}-3x^n+2x^{n-1}$;

(5) $p^{m+3}-p^m$; (6) $q^{n-3}+q^n$.

2. (1) $14x^2+x-3$; (2) $12t^2-8t-7$;

(3) $6m^2-7mn-20n^2$; (4) $18x^2-21xy+5y^2$.

3. 利用因式分解计算:

(1) 1 297 的 5%,减去 897 的 5%,差是多少;

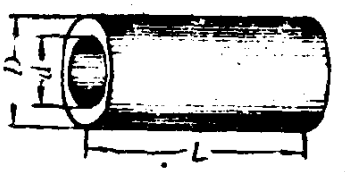
(2) 869 的 36%,加上 869 的 54%,和是多少.

4. 求证:当 n 是整数时,两个连续奇数的平方差 $(2n+1)^2-(2n-1)^2$ 是 8 的倍数.

5. (1) 求证:当 n 是整数时,两个连续整数的平方差 $(n+1)^2-n^2$ 等于这两个连续整数的和.

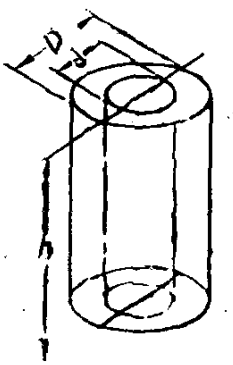
(2) 求证:当 n 是整数时,两个连续奇数的平方差 $(2n+1)^2-(2n-1)^2$ 是这两个奇数的和的 2 倍.

6. 如图，某农场修建一座小型水库，需要一种空心混凝土(一种由水泥、黄砂、碎石等混合而成的建筑材料)管道，它的规格是:内径 $d=45$ 厘米，外径 $D=75$ 厘米，长 $L=300$ 厘米. 利用因式分解计算浇制(把用水搅拌的混凝土原料浇入固定的模具，等到干燥后打开模具，得到成品)一节这样的管道需要多少立方米的混凝土(π 取 3.14，结果保留两个有效数字).



(第6题)

7. 如图，水压机有 4 根空心钢立柱，每根的高 h 都是 18 米，外径 D 为 1 米，内径 d 为 0.4 米，每立方米钢的重量为 7.8 吨，求 4 根立柱的总重量(π 取 3.14，结果保留两个有效数字).



(第7题)

自我测验八

(满分 100 分,时间 45 分)

1. (每空 2 分，共 24 分)填空:

(1) 把一个多项式化成几个整式的_____的形式，叫做把这个多项式进行因式分解.

(2) 把一个多项式分解因式时，如果多项式的各项有公因式，那么先_____.

(3) 平方差 m^4-____$=(m^2+5)(m^2-$____$)$;

立方和 $27p^3+1=(3p+1)($_____$+1)$;

立方差 $x^9-64=($____$-4)(x^6+$_____$)$;

完全平方式 $\frac{a^2}{36}+\frac{ab}{6}+$____$=($____$+0.5b)^2$;

完全平方式____$+49x^2+y^2=($____$-y)^2$.

(4) 二次三项式 $6x^2+7xy-5y^2=(2x-y)(3x+$___$)$.

2. (每小题 6 分,共 48 分)把下列各式分解因式:

(1) $(a-4)b+(4-a)c$;　　(2) $a^2c-abd-abc+a^2d$;

(3) $(a+2b)^3-(a-2b)^3$;　　(4) x^4-x^3+x-1;

(5) $x^3-ax^2-b^2x+ab^2$;

(6) $(a-2b)^2+(a-2b)-12$;

(7) $2(x-y)^2-(x-y)-3$;　　(8) a^6-b^6.

3. (每小题 6 分,共 18 分)把下列各式分解因式:

(1) $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$;

(2) $x^2+5xy+6y^2+x+3y$;

(3) $(x+y)^2-4(x+y-1)$.

4. (每小题 5 分, 共 10 分):

(1) 已知矩形的面积是 $6x^2+13x+5\,(x>0)$,其中一边长是 $2x+1$,求表示该矩形的另一边的代数式.

(2) 已知正方形的面积是 $9x^2+6xy+y^2\,(x>0,y>0)$,求表示该正方形的边长的代数式.

第九章

分式

$\frac{90}{x}$　　$\frac{60}{x-6}$

$$\frac{90}{x}=\frac{60}{x-6}$$

我们已经学了整式，知道可以用整式表示某些数量关系. 我们也学了整式的加、减、乘、除四则运算. 在学习整式及其运算的基础上，我们学习了方程的解法和列方程解应用题. 但是，有些数量关系只用整式表示是不够的. 我们看下面的问题：

甲乙二人做某种机器零件. 已知甲每小时比乙多做 6 个，甲做 90 个所用的时间与乙做 60 个所用的时间相等. 求甲乙每小时各做多少个.

对于上述问题，仿照已经学过的列方程解应用题的方法分析如下：

设甲每小时做 x 个零件，那么乙每小时做 $(x-6)$ 个. 甲做 90 个所用的时间是 $90\div x$（或 $\frac{90}{x}$）小时，乙做 60 个所用的时间是 $[60\div(x-6)]$（或 $\frac{60}{x-6}$）小时. 根据题意，列出方程

$$\frac{90}{x}=\frac{60}{x-6}.$$

可以看出，$\frac{90}{x}$，$\frac{60}{x-6}$ 都不是整式，列出的方程也不是我们学过的方程. 学习本章内容，就可以正确认识这样的式子及方程，从而解决问题.

9.1 分式

1. 能说出分式的意义.
2. 能求出分式有意义的条件.

我们知道,两个数相除可以表示成分数的形式,例如,$3\div4$,$10\div3$,$12\div11$,$-7\div2$ 可以分别表示成

$$\frac{3}{4},\ \frac{10}{3},\ \frac{12}{11},\ \frac{-7}{2}.$$

我们知道,分数中的分子相当于除式中的被除数,分数中的分母相当于除式中的除数.因为零不能作除数,所以分数的分母不能是零.

在代数中,整式的除法也可以类似地表示.

例如,在前面的问题中,甲每小时做 x 个零件,做 90 个零件所用的时间是 $(90\div x)$ 小时,就可用式子 $\frac{90}{x}$ 小时来表示;乙每小时做 $(x-6)$ 个零件,做 60 个零件所用的时间是 $[60\div(x-6)]$ 小时,就可用式子 $\frac{60}{x-6}$ 小时来表示.

又如,n 公顷麦田共收小麦 m 吨,平均每公顷产量 $(m\div n)$ 吨可以用式子 $\frac{m}{n}$ 吨来表示.

再如,轮船在静水中每小时走 a 千米,水流速度是 b 千米/时,轮船在逆流中航行 s 千米所需要的时间 $[s\div(a-b)]$ 小时就可以用式子 $\frac{s}{a-b}$ 小时来表示.

上述式子

$$\frac{90}{x},\ \frac{60}{x-6},\ \frac{m}{n},\ \frac{s}{a-b}$$

的分母中都含有字母.

一般地，用 A，B 表示两个整式，$A \div B$ 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式.如果 B 中含有字母，式子 $\frac{A}{B}$ 就叫做分式.其中，A 叫做分式的分子，B 叫做分式的分母.如上列各式就都是分式.

下列式子

$$\frac{x}{90},\ \frac{x-6}{60},\ \frac{x^2-y^2}{3},\ \frac{x-y}{4}$$

中，因为它们的分母都不含有字母，所以都不是分式，而是整式.

整式和分式统称有理式.

在分式中，分母的值不能是零.分式中的分母如果是零，则分式没有意义.例如，在分式 $\frac{90}{x}$ 里，$x \neq 0$；在分式 $\frac{60}{x-6}$ 里，$x \neq 6$；在分式 $\frac{m}{n}$ 里，$n \neq 0$；在分式 $\frac{s}{a-b}$ 里，$a \neq b$.

例 1 当 x 取什么值时，下列分式有意义？

(1) $\frac{x}{x-2}$；　　(2) $\frac{x-1}{4x+1}$.

分析：只有当分母等于零时，分式没有意义.

解:(1) 由分母 $x-2=0$,得 $x=2$.

所以当 $x\neq 2$ 时,分式 $\frac{x}{x-2}$ 有意义;

(2) 由分母 $4x+1=0$,得 $x=-\frac{1}{4}$.

所以当 $x\neq -\frac{1}{4}$ 时,分式 $\frac{x-1}{4x+1}$ 有意义.

例 2 当 x 是什么数时,分式 $\frac{x+2}{2x-5}$ 的值是零?

分析:当分子等于零而分母不等于零时,分式的值是零.

解:由分子 $x+2=0$,得 $x=-2$.

而当 $x=-2$ 时,分母 $2x-5=-4-5\neq 0$.

所以,当 $x=-2$ 时,分式 $\frac{x+2}{2x-5}$ 的值是零.

练 习

1. 把下列各式写成分式:

$x+y, s\div v, 6000\div ab, a\div(b+c), (x-y)\div(x+y)$.

2. 下列各有理式,哪些是整式,哪些是分式?

$-3x, \frac{3}{x}, \frac{x^2y-xy^2}{3}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{5+y}, \frac{x}{x-y}$.

3. 当 x 取什么数时,下列分式有意义?

(1) $\frac{1}{x}$;(2) $\frac{2x}{x+2}$;(3) $\frac{x+1}{2x-5}$;(4) $\frac{2x-1}{3x+4}$.

4. 当 x 取什么数时,下列分式的值等于零?

(1) $\frac{5x}{x-1}$;　　(2) $\frac{3x-4}{10x+1}$.

习 题 9.1

A 组

1. 把下列各式写成分式:

   $1+xy$, $a\div(b+1)$, $(a+b)\div c$, $(x-1)\div(x+1)$.

2. 下列各有理式,哪些是整式,哪些是分式?

   $\frac{2}{x}$, $\frac{x}{2}$, $\frac{1}{3}a^2b-\frac{1}{2}ab^2$, $\frac{x}{5}-\frac{z}{y}$.

3. 当 x 取什么数时,下列分式有意义?

   (1) $\frac{x}{3x-1}$; (2) $\frac{x^2}{x+1}$; (3) $\frac{3}{0.5x-1}$.

4. 在下列各分式中,当 x 等于什么数时,分式的值是零? 当 x 等于什么数时,分式没有意义?

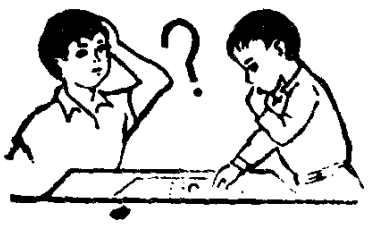
   (1) $\frac{2x+1}{2-x}$; (2) $\frac{2x-0.5}{3x+1}$.

B 组

当 x 取什么数时,下列分式有意义? 当 x 取什么值时,分式的值是零?

(1) $\frac{x}{x^2+1}$; (2) $\frac{x-5}{x^2}$; (3) $\frac{2x-10}{x-5}$.

想一想



你能很快判断 $\frac{1}{a}$ 是分式吗? 当 $a=1,2,3,\cdots 100,\cdots$ 时,式子的值是怎样变化的? 当 $a=0.3$, $0.2,0.1,\cdots,0.01,\cdots$ 时,式子的值是怎样变化的? a 的值能取 0 吗?

9.2 分式的基本性质

能说出分式的基本性质，并能用它将分式变形.

我们知道，分数的基本性质是：分数的分子与分母都乘以（或除以）同一个不等于零的数，分数的值不变. 例如，

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times 4}{5\times 4},\quad \frac{6}{18}=\frac{6\div 6}{18\div 6}.$$

分式也有类似的性质，就是：

分式的分子与分母都乘以（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变. 这个性质叫做分式的基本性质，用式子表示是：

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\quad \frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$$

（其中 M 是不等于零的整式）.

例 1 下列等式的右边是怎样从左边得到的？

(1) $\frac{a}{2b}=\frac{ac}{2bc}$ $(c\neq 0)$；(2) $\frac{x^3}{xy}=\frac{x^2}{y}$.

解：(1) $\because\ c\neq 0$，

$$\therefore\ \frac{a}{2b}=\frac{a\cdot c}{2b\cdot c}=\frac{ac}{2bc}.$$

(2) ∵ $x \neq 0$,

∴ $\dfrac{x^3}{xy} = \dfrac{x^3 \div x}{xy \div x} = \dfrac{x^2}{y}$.

例 2 填空:

(1) $\dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{(\quad)}{a^2b}$; (2) $\dfrac{x^2+xy}{x^2} = \dfrac{x+y}{(\quad)}$.

分析:(1) 右边的分母 a^2b 等于左边的分母 ab 乘以 a,所以右边的分子应是左边的分子 $(a+b)$ 乘以 a,即 $(a+b)\cdot a = a^2+ab$.

(2) 右边的分子 $x+y$ 等于左边的分子 $x^2+xy = x(x+y)$ 除以 x,所以右边的分母应是左边的分母 x^2 除以 x,即 $x^2 \div x = x$.

解:(1) a^2+ab. (2) x.

练 习

1. 下列等式的右边是怎样从左边得到的?

(1) $\dfrac{1}{ab} = \dfrac{c}{abc}$ $(c \neq 0)$; (2) $\dfrac{a^2x}{bx} = \dfrac{a^2}{b}$;

(3) $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ $(x+1 \neq 0)$; (4) $\dfrac{(x-y)^2}{x^2-y^2} = \dfrac{x-y}{x+y}$.

2. 填空:

(1) $\dfrac{y}{x} = \dfrac{(\quad)}{x^2}$; (2) $\dfrac{ab}{a^2} = \dfrac{b}{(\quad)}$;

(3) $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{(\quad)}{2xy^2}$; (4) $\dfrac{a^2+a}{ac} = \dfrac{(\quad)}{c}$.

例 3 不改变分式的值，把下列各式的分子与分母中各项的系数都化为整数：

(1) $\dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y}{\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y}$；　(2) $\dfrac{0.3a+0.5b}{0.2a-b}$.

解：(1) $\dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y}{\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\times 6}{\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)\times 6}=\dfrac{3x+4y}{3x-4y}$；

(2) $\dfrac{0.3a+0.5b}{0.2a-b}=\dfrac{(0.3a+0.5b)\times 10}{(0.2a-b)\times 10}=\dfrac{3a+5b}{2a-10b}$.

例 4 不改变分式的值，使下列分式的分子与分母都不含“－”号：

(1) $\dfrac{-5b}{-6a}$；　(2) $\dfrac{-x}{3y}$；　(3) $\dfrac{2m}{-n}$.

分析：有理数除法的符号法则“同号得正，异号得负”，在分式（两式相除）中同样适用.

解：(1) $\dfrac{-5b}{-6a}=\dfrac{5b}{6a}$；

(2) $\dfrac{-x}{3y}=-\dfrac{x}{3y}$；

(3) $\dfrac{2m}{-n}=-\dfrac{2m}{n}$.

注意 根据分式的基本性质可以归纳得出：分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变.

练　习

1. 不改变分式的值，把下列各式的分子与分母中各项的系数都化为整数：

(1) $\dfrac{0.5x-0.7y}{0.3x+0.2y}$；　　(2) $\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{\frac{3}{4}a-2b}$.

2. 不改变分式的值，使下列分式的分子与分母都不含“－”号：

(1) $\dfrac{-a}{-2b}$；(2) $\dfrac{-2x}{3y}$；(3) $\dfrac{3m}{-4n}$；(4) $-\dfrac{-4m}{5n}$.

例5　不改变分式的值，使下列分式的分子与分母的最高次项的系数是正数：

(1) $\dfrac{x}{1-x^2}$；(2) $\dfrac{-a-1}{a^2-2}$；(3) $\dfrac{2-x}{-x^2+3}$.

解：(1) $\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{x}{-(x^2-1)}=-\dfrac{x}{x^2-1}$；

(2) $\dfrac{-a-1}{a^2-2}=\dfrac{-(a+1)}{a^2-2}=-\dfrac{a+1}{a^2-2}$；

(3) $\dfrac{2-x}{-x^2+3}=\dfrac{-(x-2)}{-(x^2-3)}=\dfrac{x-2}{x^2-3}$.

练　习

不改变分式的值，使下列分式的分子与分母的最高次项的系数是正数：

$\dfrac{1-a-a^2}{1+a^2-a^3}$；　$\dfrac{x+1}{1-x^2}$；　$-\dfrac{1-a^3}{a^2-a+1}$.

习 题 9.2

A 组

1. 下列等式的右边是怎样从左边得到的?

(1) $\frac{z}{xy}=\frac{z^2}{xyz}(z\neq 0)$; (2) $\frac{axy}{abxy^2}=\frac{1}{by}$;

(3) $\frac{1}{x+1}=\frac{x-1}{x^2-1}(x-1\neq 0)$; (4) $\frac{x-1}{x^2-2x+1}=\frac{1}{x-1}$.

2. 填空:

(1) $\frac{3x}{x+y}=\frac{(\quad)}{5(x+y)}$; (2) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}=\frac{1}{(\quad)}$.

3. 不改变分式的值,把下列各式的分子与分母中的各项系数都化为整数:

(1) $\frac{0.01x-0.5}{0.3x+0.04}$; (2) $\frac{2a-\frac{3}{2}b}{\frac{2}{3}a+b}$.

4. 不改变分式的值,使下列分式的分子与分母都不含"-"号:

(1) $\frac{-3x}{2y}$; (2) $\frac{-abc}{-d}$; (3) $\frac{2q}{-p}$; (4) $-\frac{-3m}{2n}$.

5. 不改变分式的值,使下列分式的分子与分母的最高次项的系数是正数:

(1) $\frac{-x^2-1}{3-x}$; (2) $\frac{1+x+x^2}{1+x-x^2}$;

(3) $\frac{-a^3+a^2-1}{1-a^2-a^3}$; (4) $\frac{m-n^2}{1+m^2}$.

6. 不改变分式的值，使分母的第一项系数是正数：

(1) $\frac{-x+y}{-x-y}$；　　(2) $\frac{x+y}{-x+y}$.

B 组

1. 下列等式的右边是怎样从左边得到的？

(1) $\frac{1}{x+2}=\frac{x-3}{x^2-x-6}$ $(x-3\neq 0)$;

(2) $\frac{x-4}{x^2-5x+4}=\frac{1}{x-1}$；　(3) $\frac{x^2-16}{x+4}=x-4$;

(4) $\frac{1}{3x-2}=\frac{2x-3}{6x^2-13x+6}$ $\left(x\neq\frac{3}{2}\right)$.

2. 不改变分式本身的符号和分式的值，使下列各组里第二个分式的分母和第一个分式的分母相同：

(1) $\frac{6x+1}{x^2-x+3}$，$\frac{4x-5}{-x^2+x-3}$；

(2) $\frac{3x}{(x-1)(x-2)}$，$\frac{3+x}{(x-1)(2-x)}$；

(3) $\frac{a}{(a-b)(b-c)}$，$\frac{b}{(b-a)(c-b)}$.

想一想

下列各式对不对？

1. $\frac{-xy+x^2+y^2}{x^3-y^3}=x-y$.

2. $\frac{x^2+2xy+y^2}{(x+y)^3}=x+y$.

如果不对，应怎样改正？

9.3 分式的乘除法

1. 能说出约分的意义，会将一个分式约分.
2. 会进行分式的乘(包括乘方)除运算.

1. 约分

我们知道，分数可以约分. 例如

$$\frac{6}{18}=\frac{1}{3},$$

就是把 $\frac{6}{18}$ 中分子与分母的最大公约数6约去得到 $\frac{1}{3}$.

分式与分数类似，也可以约分. 根据分式的基本性质，把一个分式的分子与分母的公因式约去，叫做分式的**约分**.

例如，分式 $\frac{6ab^2}{8b^3}$ 的分子与分母中都有因式 b，这因式的最低次幂是 b^2，分子和分母的系数的最大公约数是 2；因此可以约去 $2b^2$，即将分式的分子与分母的公因式 $2b^2$ 约去

$$\frac{6ab^2}{8b^3}=\frac{3a\cdot 2b^2}{4b\cdot 2b^2}=\frac{3a}{4b}.$$

又如，分式 $\frac{x^3-2x^2y}{x^2y-2xy^2}$ 的分子与分母分别是：

$$x^3-2x^2y=x^2(x-2y);\ x^2y-2xy^2=xy(x-2y).$$

可以看出，这个分式的分子与分母的公因式是 $x(x-2y)$，把 $x(x-2y)$ 约去，得

$$\frac{x^3-2x^2y}{x^2y-2xy^2}=\frac{x^2(x-2y)}{xy(x-2y)}=\frac{x}{y}.$$

从上面的例子可以看出，将一个分式约分的主要步骤是：**把分式的分子与分母分解因式，然后约去分子与分母的公因式.**

一个分式的分子与分母没有公因式时，叫做最简分式.约分一般是将一个分式化成最简分式.将分式约分所得的结果有时可能成为整式.

例1 约分：

(1) $\frac{-32a^2b^3c}{24b^2cd}$；　(2) $\frac{m^2-3m}{9-m^2}$；

(3) $\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$.

分析：因为(1)式的分子、分母都是几个因式的积的形式，所以约去分子、分母中相同因式的最低次幂，分子、分母的系数约去它们的最大公约数.(2)、(3)的分子、分母是多项式，先分解因式，再约分.

解：(1) $\frac{-32a^2b^3c}{24b^2cd}=-\frac{8b^2c\cdot 4a^2b}{8b^2c\cdot 3d}=-\frac{4a^2b}{3d}$；

(2) $\frac{m^2-3m}{9-m^2}=\frac{m(m-3)}{-(m^2-9)}$

$=-\frac{m(m-3)}{(m+3)(m-3)}$

$=-\frac{m}{m+3}$；

(3) $\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x-2)(x+3)}=\frac{x+1}{x-2}$.

注意　分子或分母的系数是负数时，一般先把负号提到分式本身的前边.

练　习

1. 约分：

(1) $\frac{-4m^3n^2}{2m^3n^6}$；　(2) $\frac{3a^2b(m-1)}{9ab^2(1-m)}$；　(3) $\frac{12a^3(y-x)^2}{27(x-y)}$.

2. 约分：

(1) $\frac{a^2+ab}{a^2+2ab+b^2}$；(2) $\frac{m^2-2m+1}{m^2+m-2}$；(3) $\frac{y-2+y^2}{y^2+4y+4}$.

2. 分式的乘除法

分式的乘除法与分数的乘除法类似，法则如下：

分式乘以分式，用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母；

分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

用式子表示是：

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

例 2　计算：

(1) $\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}$；　(2) $\frac{ab^2}{2c^2}\div\frac{-3a^2b^2}{4cd}$.

解：(1) $\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}=\frac{4x\cdot y}{3y\cdot 2x^3}=\frac{2}{3x^2}$；

(2) $\frac{ab^2}{2c^2}\div\frac{-3a^2b^2}{4cd}=\frac{ab^2}{2c^2}\cdot\frac{4cd}{-3a^2b^2}$

$=-\frac{ab^2\cdot 4cd}{2c^2\cdot 3a^2b^2}=-\frac{2d}{3ac}$.

注意 按照法则进行分式乘除运算，如果运算结果不是最简分式，一定要进行约分，使运算结果化成最简分式.

例3 计算 $\frac{a^2-4}{a^2-4a+3}\cdot\frac{a-3}{a^2+3a+2}$.

分析：上式中的分子、分母有些可以进行因式分解，先进行因式分解再计算.

解：$\frac{a^2-4}{a^2-4a+3}\cdot\frac{a-3}{a^2+3a+2}$

$=\frac{(a+2)(a-2)}{(a-1)(a-3)}\cdot\frac{a-3}{(a+1)(a+2)}$

$=\frac{(a+2)(a-2)(a-3)}{(a-1)(a-3)(a+1)(a+2)}$

$=\frac{a-2}{a^2-1}$.

由上例可知，进行分式乘法运算，当分子、分母是多项式时，一般应先分解因式，并在运算过程中约分，使运算简化.

例4 计算 $\frac{2x-6}{4-4x+x^2}\div(x+3)\cdot\frac{x^2+x-6}{3-x}$.

解：$\frac{2x-6}{4-4x+x^2}\div(x+3)\cdot\frac{x^2+x-6}{3-x}$

$=\frac{2(x-3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{-(x-3)}$

$=-\frac{2}{x-2}$.

练 习

1. 计算:

(1) $\frac{3a}{4b}\cdot\frac{16b}{9a^2}$; (2) $\frac{12xy}{5a}\div 8x^2y$; (3) $-3xy\div\frac{2y^2}{3x}$.

2. 计算:

(1) $\frac{3a-3b}{10ab}\cdot\frac{50a^2b^2}{a^2-b^2}$; (2) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+x}{x-3}$;

(3) $(xy-x^2)\div\frac{x-y}{xy}$; (4) $\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2}\div\frac{x+2y}{x^2+xy}$;

(5) $\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}\div(x+1)\cdot\frac{x^2+3x+2}{x-1}$.

根据乘方的意义和分式乘法法则,可得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a\cdot a}{b\cdot b}=\frac{a^2}{b^2},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}=\frac{a^3}{b^3},\cdots.$$

一般地,当 n 为正整数时,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\text{个}\frac{a}{b}}$$

$$=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}a}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n\text{个}b}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

即

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(n\text{为正整数}).}$$

这就是说,**分式乘方是把分子、分母各自乘方.**

例5 计算:

(1) $\left(\frac{2a^2b}{-c^3}\right)^3$; (2) $\left(-\frac{x^2}{y}\right)^2\cdot\left(-\frac{y^2}{x}\right)^3\div\left(-\frac{y}{x}\right)^4$.

解: (1) $\left(\frac{2a^2b}{-c^3}\right)^3=\frac{2^3\cdot(a^2)^3\cdot b^3}{(-c^3)^3}=\frac{8a^6b^3}{-c^9}$

$=-\frac{8a^6b^3}{c^9}$;

(2) $\left(-\frac{x^2}{y}\right)^2\cdot\left(-\frac{y^2}{x}\right)^3\div\left(-\frac{y}{x}\right)^4=\frac{x^4}{y^2}\cdot\left(-\frac{y^6}{x^3}\right)\cdot\frac{x^4}{y^4}$

$=-x^5$.

练 习

1. 计算:

(1) $\left(\frac{2x}{-y}\right)^2$; (2) $\left(\frac{-3x}{2y}\right)^3$; (3) $\left(\frac{5ab^3}{-3c^2}\right)^2$;

(4) $\left(\frac{2a^3y}{-x^2}\right)^3$; (5) $\left(\frac{a+b}{4x}\right)^2$; (6) $\left(\frac{2x-y}{-5a^2}\right)^2$.

2. 计算:

(1) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^2\cdot\left(\frac{3y}{4x}\right)^3$; (2) $4x^2y\div\left(\frac{2x}{-y}\right)^2$;

(3) $\left(\frac{b^2}{ac}\right)^3\div(-b^6c)$; (4) $\left(-\frac{a^2}{b}\right)^2\cdot\left(-\frac{b^2}{a}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{ab}\right)^4$.

想一想

下列各式对不对?

1. $\frac{x^6}{x^2}=x^3$, $\frac{x+y}{x+y}=0$.
2. $\frac{-a+b}{-a-b}=\frac{a+b}{a-b}$.
3. $\frac{1}{-x+y}=-\frac{1}{x+y}$.

如果不对,应怎样改正?

习 题 9.3

A 组

1. 约分:

(1) $\frac{4a^2b}{-2a}$; (2) $\frac{-8x^2y^2}{-12x^4y}$; (3) $\frac{12a^3b^4}{15a^3b^2c}$;

(4) $\frac{(b-a)^2}{2(a-b)}$; (5) $\frac{a^2+3ab}{a^2b+3ab^2}$; (6) $\frac{xy+xy^2}{x^2y^3+x^2y^4}$.

2. 约分:

(1) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$; (2) $\frac{1+m}{1-m-2m^2}$; (3) $\frac{3ab+3b^2}{a^2b+2ab^2+b^3}$;

(4) $\frac{x^2-2x-3}{x^3+2x^2-15x}$; (5) $\frac{2x^3-2y^3}{4x^2+4xy+4y^2}$.

3. 先约分,再求值:

(1) $\frac{x^3+y^3}{x^3-x^2y+xy^2}$, 其中 $x=5, y=3.5$;

(2) $\frac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}$, 其中 $a=\frac{3}{4}, b=-\frac{2}{3}$.

4. 计算:

(1) $\frac{2}{x}\div\frac{4}{x}$; (2) $8a^2b^4\cdot\frac{-3a}{4b^3}$;

(3) $\frac{4a^4b^2}{15n^3}\div\frac{-8a^2b^2}{35n^2}$; (4) $\frac{a^2-4b^2}{3ab^2}\cdot\frac{ab}{a-2b}$.

5. 计算:

(1) $\frac{x^2-y^2}{x-}\cdot\frac{-x^2}{(x+y)^3}$; (2) $\frac{x^3-y^3}{x+y}\div\frac{x^2+xy+y^2}{2x+2y}$.

6. 计算:

(1) $\frac{x^2-y^2}{xy}\div(x-y)$; (2) $(x^3+y^3)\div\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$.

7. 计算:

(1) $\left(\frac{y^2}{-x^3}\right)^4$;　　(2) $\left(\frac{-2a^2b}{3xy^2}\right)^3$;

(3) $\left(\frac{x^2y}{-z^2}\right)^3 \div \left(\frac{-x^3}{z}\right)^2$;

(4) $\left(\frac{a^2b}{-c}\right)^3 \cdot \left(\frac{c^2}{-ab}\right)^2 \div \left(\frac{bc}{a}\right)^4$.

B 组

1. 约分:

(1) $\frac{32(a-2b)^2(-a+b)}{24(2b-a)^2(a-b)}$;

(2) $\frac{x^3-4xy^2}{-x^3-4x^2y-4xy^2}$.

2. 约分:

(1) $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(b-a)(a-c)(c-b)}$;

(2) $\frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2-y^2+z^2-2xz}$.

3. 计算:

(1) $\left(\frac{b^2}{a^3}\right)^n$($n$ 为正整数);(2) $\left(\frac{b^{n+1}}{a^n}\right)^3$($n$ 为正整数).

4. 计算:

(1) $(xy-x^2) \div \frac{x^2-2xy+y^2}{xy} \cdot \frac{x-y}{x^2}$;

(2) $\frac{x^2+2x+4}{x^2+4x+4} \div \frac{x^3-8}{3x+6} \div \frac{1}{x^2-4}$.

9.4 分式的加减法

1. 能说出通分的意义，会将几个分母不相同的分式通分.
2. 会进行分式的加减运算.

1. 通分

我们知道，几个分数可以通分.例如

$$\frac{3}{2}=\frac{3\times 4}{2\times 4}=\frac{12}{8},$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1\times 2}{4\times 2}=\frac{2}{8},$$

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times 1}{8\times 1}=\frac{5}{8}.$$

分式与分数类似，也可以通分.根据分式的基本性质，把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母的分式，叫做分式的**通分**.

通分的关键是确定几个分式的公分母.通常取各分母所有因式的最高次幂的积作公分母，这样的公分母，叫做**最简公分母**.

例如，把分式 $\frac{1}{x^3y^2}$，$\frac{1}{x^2y^3}$，$\frac{1}{xy^4}$ 通分.先确定几个分式的最简公分母为 x^3y^4，然后根据分式的基本性质，分别把原来各分式的分子和分母同乘以一个适当的整式，使各分式的分母都化成 x^3y^4.

通分过程如下：

$$\frac{1}{x^3y^2}=\frac{y^2}{x^3y^2\cdot y^2}=\frac{y^2}{x^3y^4},$$

$$\frac{1}{x^2y^3}=\frac{xy}{x^2y^3\cdot xy}=\frac{xy}{x^3y^4},$$

$$\frac{1}{xy^4}=\frac{x^2}{xy^4\cdot x^2}=\frac{x^2}{x^3y^4}.$$

将几个分式通分时，还应注意两点：(1)如果各分母的系数都是整数时，通常取它们的系数的最小公倍数作为最简公分母的系数；(2)当分母是多项式时，一般应先分解因式.

例1 通分：

(1) $\frac{y}{2x}$，$\frac{x}{3y^2}$，$\frac{1}{4xy}$；

(2) $\frac{4a}{5b^2c}$，$\frac{3c}{10a^2b}$，$\frac{5b}{-2ac^2}$.

分析：对于(1)，因为分母系数的最小公倍数是12，字母因式 x，y 的最高次幂分别是 x，y^2，所以最简公分母是 $12xy^2$；对于(2)，按照上述方法可知最简公分母是 $10a^2b^2c^2$.

解：(1) ∵ 最简公分母是 $12xy^2$，

∴ $\frac{y}{2x}=\frac{y\cdot 6y^2}{2x\cdot 6y^2}=\frac{6y^3}{12xy^2}$，

$\frac{x}{3y^2}=\frac{x\cdot 4x}{3y^2\cdot 4x}=\frac{4x^2}{12xy^2}$，

$\frac{1}{4xy}=\frac{1\cdot 3y}{4xy\cdot 3y}=\frac{3y}{12xy^2}$；

(2) ∵ 最简公分母是 $10a^2b^2c^2$,

∴ $\dfrac{4a}{5b^2c}=\dfrac{4a\cdot 2a^2c}{5b^2c\cdot 2a^2c}=\dfrac{8a^3c}{10a^2b^2c^2}$,

$\dfrac{3c}{10a^2b}=\dfrac{3c\cdot bc^2}{10a^2b\cdot bc^2}=\dfrac{3bc^3}{10a^2b^2c^2}$,

$\dfrac{5b}{-2ac^2}=-\dfrac{5b\cdot 5ab^2}{2ac^2\cdot 5ab^2}=-\dfrac{25ab^3}{10a^2b^2c^2}$.

例 2 通分:

(1) $\dfrac{x}{2(x+1)}$, $\dfrac{1}{x^2-x}$; (2) $\dfrac{1}{x^2-4}$, $\dfrac{x}{4-2x}$.

分析:(1)中的分母是 $2(x+1)$, $x^2-x=x(x-1)$, 最简公分母是 $2x(x+1)(x-1)$;(2)中的分母分解因式后,得 $x^2-4=(x+2)(x-2)$, $4-2x=-2(x-2)$,最简公分母是 $2(x+2)(x-2)$.

解:(1) ∵ 最简公分母是 $2x(x+1)(x-1)$,

∴ $\dfrac{x}{2(x+1)}=\dfrac{x^2(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}$,

$\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{2(x+1)}{2x(x+1)(x-1)}$;

(2) ∵ 最简公分母是 $2(x+2)(x-2)$,

∴ $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{2}{2(x+2)(x-2)}$,

$\dfrac{x}{4-2x}=\dfrac{x}{-2(x-2)}=-\dfrac{x(x+2)}{2(x+2)(x-2)}$.

练　习

1. 通分：

(1) $\frac{x}{ab}$，$\frac{y}{bc}$；　　(2) $\frac{2}{3a^2}$，$\frac{1}{6ab^2}$；

(3) $\frac{a}{2b}$，$\frac{b}{3a^2}$，$\frac{c}{4ab}$；　　(4) $\frac{3}{2x^2y}$，$\frac{5}{3xy^2}$.

2. 通分：

(1) $\frac{x}{a(x+2)}$，$\frac{y}{b(x+2)}$；　　(2) $\frac{1}{y-x}$，$\frac{1}{2x-2y}$；

(3) $\frac{b}{a-b}$，$\frac{a}{(b-a)^2}$；　　(4) $\frac{5}{2(x-2)}$，$\frac{4}{3(2-x)^2}$.

3. 通分：

(1) $\frac{1}{x^2-3x+2}$，$\frac{1}{x^2-1}$；

(2) $\frac{1}{x+1}$，$\frac{x-1}{x^2+2x+1}$，$\frac{1}{x-1}$；

(3) $\frac{a}{a-b}$，$\frac{b}{(a+b)^2}$，$\frac{2}{b^2-a^2}$；

(4) $\frac{1}{x-1}$，$\frac{1}{x^3-1}$，$\frac{1}{x^2+x+1}$.

2. 分式的加减法

分式的加减法与分数的加减法一样，分为同分母的分式相加减与异分母的分式相加减.

(1) **同分母的分式加减法**. 与同分母的分数加减法类似，同分母的分式加减法的法则是：

同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减.

上述法则用式子表示是

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

例 3 计算 $\frac{x+3y}{x^2-y^2}-\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{2x-3y}{x^2-y^2}$.

解: $\frac{x+3y}{x^2-y^2}-\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{2x-3y}{x^2-y^2}$

$$=\frac{(x+3y)-(x+2y)+(2x-3y)}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{2x-2y}{x^2-y^2}=\frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{2}{x+y}.$$

注意 把分子相加减后，如果所得结果不是最简分式，要约分.

例 4 计算 $\frac{m+2n}{n-m}+\frac{n}{m-n}-\frac{2m}{n-m}$.

解: $\frac{m+2n}{n-m}+\frac{n}{m-n}-\frac{2m}{n-m}$

$$=\frac{-m-2n}{m-n}+\frac{n}{m-n}+\frac{2m}{m-n}$$

$$=\frac{-m-2n+n+2m}{m-n}=\frac{m-n}{m-n}=1.$$

练 习

1. 计算:

(1) $\frac{3}{a}+\frac{12}{a}-\frac{5}{a}$;　　(2) $\frac{5}{m}-\frac{15}{m}$;

(3) $\frac{a}{x-y}-\frac{a}{x-y}$;　　(4) $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}$.

2. 计算:

(1) $\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}$; (2) $\frac{2x+5}{2x+2}-\frac{x-1}{2x+2}+\frac{2x-3}{2x+2}$;

(3) $\frac{5x}{y-3}+\frac{2x}{3-y}$; (4) $\frac{2a}{2a-b}+\frac{b}{b-2a}$;

(5) $\frac{a^2-c^3}{a^2-b^2}+\frac{b^2-c^3}{b^2-a^2}$; (6) $\frac{4}{x-2}+\frac{x+2}{2-x}$.

3. 计算:

(1) $\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{y}{y^2-x^2}-\frac{2x}{x^2-y^2}$;

(2) $(x+y)\cdot\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{x-y}-(2x^2y-2xy^2)$
$\div(x^2-2xy+y^2)$.

(2) 异分母的分式加减法. 与异分母的分数加减法类似，异分母的分式加减法的法则是:

异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，然后再加减.

上述法则用式子表示是

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

例5 计算 $\frac{5}{6ab}-\frac{2}{3ac}+\frac{3}{4abc}$.

解: $\frac{5}{6ab}-\frac{2}{3ac}+\frac{3}{4abc}$

$=\frac{10c}{12abc}-\frac{8b}{12abc}+\frac{9}{12abc}$

$=\frac{10c-8b+9}{12abc}$.

例6 计算 $\frac{12}{m^2-9}+\frac{2}{3-m}$.

解: $\frac{12}{m^2-9}+\frac{2}{3-m}$

$=\frac{12}{(m+3)(m-3)}-\frac{2}{m-3}$

$=\frac{12}{(m+3)(m-3)}-\frac{2(m+3)}{(m+3)(m-3)}$

$=\frac{12-2(m+3)}{(m+3)(m-3)}$

$=\frac{12-2m-6}{(m+3)(m-3)}$

$=\frac{-2m+6}{(m+3)(m-3)}$

$=\frac{-2(m-3)}{(m+3)(m-3)}$

$=-\frac{2}{m+3}$.

例7 计算 $a+2-\frac{4}{2-a}$.

分析:把 $a+2$ 化成 $\frac{a+2}{1}$ 再进行运算.

解: $a+2-\frac{4}{2-a}$

$=\frac{a+2}{1}+\frac{4}{a-2}$

$=\frac{a^2-4+4}{a-2}=\frac{a^2}{a-2}$.

练 习

1. 计算：

(1) $\frac{2}{3x^2}+\frac{3}{4y}-\frac{5}{6xy}$；　(2) $\frac{5a}{6b^2c}-\frac{7b}{12ac^2}+\frac{11c}{8a^2b}$.

2. 计算：

(1) $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$；　(2) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}$；

(3) $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$；　(4) $a-b+\frac{2b^2}{a+b}$.

3. 计算：

(1) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$；　(2) $\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a(b-a)}$；

(3) $\frac{1}{m^2-m}+\frac{m-5}{2m^2-2}$；　(4) $\frac{y}{x+y}+\frac{xy}{y^2-x^2}$；

(5) $\frac{a+5}{5a-20}+\frac{5}{a^2-9a+20}$；　(6) $\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}-\frac{x-1}{6+2x}$.

与分数的加、减、乘、除混合运算的运算顺序一样，分式的加、减、乘、除混合运算也是先进行乘、除运算，再进行加、减运算. 遇有括号，先算括号内的.

例 8　计算 $\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}$.

解：$\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{(x+3)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$.

例9 计算 $\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x}$.

解: $\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x}$

$=\left[\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{(x+2)(x-2)-(x-1)x}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{x^2-4-x^2+x}{(x-2)^2(x-4)}$

$=\frac{1}{(x-2)^2}$.

练 习

1. 计算:

(1) $\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}\right)\cdot\frac{ab}{a-b}$;

(2) $\left(1-\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{x^3}-1\right)$.

2. 计算:

(1) $\frac{3-m}{2m-4}\div\left(m+2-\frac{5}{m-2}\right)$;

(2) $1-\frac{a-b}{a+2b}\div\frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2}$;

(3) $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\div\frac{4x}{2-x}$.

习 题 9.4

A 组

1. 通分:

(1) $\frac{x-1}{-2x^2}, \frac{4}{3x}, \frac{x+1}{4x^3}$; (2) $\frac{2}{3a^2}, \frac{3}{-4ab^2}, \frac{4}{5a^2b^2}$;

(3) $\frac{x}{a(x-y)}, \frac{y}{b(y-x)}$; (4) $\frac{1}{(2-x)^2}, \frac{x}{(x+2)(x-2)}$.

2. 通分:

(1) $\frac{x}{x^2-x-2}, \frac{1}{x-2}$; (2) $\frac{a}{a^3-b^3}, \frac{1}{a^2-b^2}$;

(3) $\frac{1}{(x-1)^2}, \frac{x}{x^3-1}$; (4) $\frac{1}{(x-y)^2}, \frac{2}{x^2-3xy+2y^2}$.

3. 计算:

(1) $\frac{x+y}{x}+\frac{x-y}{x}$; (2) $\frac{x^2+xy}{xy}-\frac{x^2-xy}{xy}$;

(3) $\frac{2a+5}{2(a+1)}-\frac{a-1}{2(a+1)}+\frac{2a-3}{2(a+1)}$.

4. 计算:

(1) $\frac{2}{x-y}-\frac{x+y}{(x-y)^2}$; (2) $\frac{a-b}{2a+2b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

5. 计算:

(1) $x-y+\frac{2y^2}{x+y}$; (2) $\frac{x^3}{x-1}-x^2-x-1$;

(3) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+4x+3}$;

(4) $x+2y+\frac{4y^2}{x-2y}+\frac{4x^2y}{4y^2-x^2}$;

(5) $\left(x-y+\frac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right)$;

(6) $\left[\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}\right]\div\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)$.

6. 计算:

(1) $\dfrac{x+y}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{x+z}{(y-x)(y-z)}$;

(2) $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{6ab}{(b-a)(b-c)}-\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)(c-b)}$.

B 组

1. 通分:

(1) $\dfrac{1}{a^3-3a^2+2a}$, $\dfrac{2}{a^4-a^2}$, $\dfrac{-1}{a^2+a-2}$;

(2) $\dfrac{x+4}{x^2-8x+15}$, $\dfrac{x-5}{x^2+x-12}$, $\dfrac{x-3}{x^2-x-20}$.

2. 通分:

(1) $\dfrac{a+b}{(a-b)(b-c)}$, $\dfrac{b+c}{(b-c)(b-a)}$;

(2) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$, $\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}$, $\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

3. 计算:

(1) $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}-\dfrac{6}{x^2-x-2}-\dfrac{x-10}{x^2-4}$;

(2) $\dfrac{x}{x-y}\cdot\dfrac{y^2}{x+y}-\dfrac{x^4y}{x^4-y^4}\div\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

4. 将式子 $\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}$ 化成两式相除,再进行计算.

5. 锅炉房储存了 c 天用的煤 m 吨. 要使储存的煤比预定的多用 d 天,每天应当节约多少吨?

从假分数化为带分数想起的

读一读

我们知道，一个假分数可以化为带分数的形式．例如

$$\frac{27}{5}=5\frac{2}{5}\left(=5+\frac{2}{5}\right).$$

很明显，整数部分5就是27÷5的整商，而分数部分的分子2则是27÷5的余数．

和分数的情况类似，如果一个分式的分子的次数高于或等于分母的次数，那么就可以将分式化为整式部分与分式部分的和．

例 把下列各式化成整式部分与分式部分的和：

(1) $\dfrac{3x-1}{x+1}$；　　(2) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+9}$．

分析：用多项式的除法来做．

解：(1)

$$\begin{array}{r} 3 \\ x+1\ \overline{)\,3x-1} \\ \underline{3x+3} \\ -4 \end{array}$$

$$\therefore\ \frac{3x-1}{x+1}=3+\frac{-4}{x+1}=3-\frac{4}{x+1}.$$

(2)
$$\begin{array}{r|l} & x-12 \\ \hline x+9 & x^2-3x+2 \\ & x^2+9x \\ \hline & -12x+2 \\ & -12x-108 \\ \hline & 110 \end{array}$$

$\therefore \dfrac{x^2-3x+2}{x+9}=x-12+\dfrac{110}{x+9}$.

将一个分式化成整式部分与分式部分的和可以使某些分式运算简化. 如,计算

$$\frac{x^3+x^2+x}{x+1}-\frac{x^3+2x^2-3x-7}{x+2}-\frac{4x+11}{x+3},$$

如将上式先通分再计算,可以看出是很复杂的. 下面,我们先把各个分式化成整式部分与分式部分的和,得

$$\begin{aligned} &x^2+1-\frac{1}{x+1}-\left(x^2-3-\frac{1}{x+2}\right)-\left(4-\frac{1}{x+3}\right) \\ =&-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3} \\ =&\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}. \end{aligned}$$

练 习

计算:

1. $\dfrac{x^3-2x^2+x+1}{x+2}-\dfrac{2x^3-3x^2+x+4}{x+3}$.

2. $\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2+3x+2}+\dfrac{2x^3+13x^2+27x+18}{x^2+5x+6}$
$-\dfrac{3x^3+26x^2+71x+59}{x^2+7x+12}$.

9.5 含有字母系数的一元一次方程

1. 会解含有字母系数的一元一次方程.
2. 会进行简单的公式变形.

我们先看下面的问题:

一个数的 a 倍 $(a\neq 0)$ 等于 b,求这个数.

用 x 表示这个数,根据题意,可得方程

$$ax=b\ (a\neq 0).$$

在这个方程中,x 是未知数,a 和 b 是用字母表示的已知数.对 x 来说,字母 a 是 x 的系数,叫做**字母系数**,字母 b 是常数项.这个方程就是一个含有字母系数的一元一次方程.

以后如果没有特别说明,在含有字母系数的方程中,一般用 a,b,c 等表示已知数,用 x , y , z 等表示未知数.

含有字母系数的方程的解法与以前学过的只含有数字系数的方程的解法相同.但必须特别注意:用含有字母的式子去乘或除方程的两边,这个式子的值不能等于零.

例 1 解方程 $ax+b^2=bx+a^2\ (a\neq b)$.

解:移项,得

$$ax-bx=a^2-b^2,$$

$$(a-b)x=a^2-b^2.$$

因为 $a\neq b$，所以$a-b\neq 0$. 方程的两边都除以$a-b$,得

$$x=\frac{a^2-b^2}{a-b},$$

$$\therefore \quad x=a+b.$$

注意 方程的解是分式形式时,一般要化成最简分式或整式.

例2 解方程 $\frac{x-b}{a}=2-\frac{x-a}{b}(a+b\neq 0)$.

解:去分母,得

$$b(x-b)=2ab-a(x-a),$$

$$bx-b^2=2ab-ax+a^2,$$

$$ax+bx=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)x=(a+b)^2.$$

$$\because \quad a+b\neq 0,$$

$$\therefore \quad x=a+b.$$

练 习

解下列方程(x 为未知数):

1. $3a+4x=7x-5b$.
2. $ax-by=0\ (a\neq 0)$.
3. $\frac{x}{a}-b=\frac{x}{b}-a\ (a\neq b)$.
4. $m^2(x-n)=n^2(x-m)(m^2\neq n^2)$.

我们再看下面的问题:

汽车的行驶速度是 v(千米/时),行驶的时间是 t(时),那么汽车行驶的路程 s(千米)可以用公式

$$s=vt$$

来计算.

有时已知行驶的路程 s 与行驶的速度 v ($v\neq 0$),要求行驶的时间 t. 因为 $v\neq 0$,在 $s=vt$ 的两边都除以 v,就得到

$$t=\frac{s}{v}.$$

这就是已知行驶的路程和速度,求行驶的时间的公式. 这个公式有时也写成 $t=sv^{-1}$.

类似地,如果已知 s,t ($t\neq 0$),求 v. 可以得到

$$v=\frac{s}{t}.$$

这就是已知行驶的路程和时间,求行驶的速度的公式. 同样,这个公式有时也写成 $v=st^{-1}$.

以上三个公式都表示路程 s、时间 t、速度 v 之间的关系. 当 v,t 都不等于零时,可以把公式 $s=vt$ 变换成公式 $t=\frac{s}{v}$ (或 $t=sv^{-1}$)和 $v=\frac{s}{t}$(或 $v=st^{-1}$).

像上面这样,把一个公式从一种形式变换成另一种形式,叫做**公式变形**. 公式变形往往就是解含有字母系数的方程.

例 3 在 $v=v_0+at$ 中，已知 v，v_0，a，且 $a\neq0$，求 t.

解：移项，得

$$v-v_0=at.$$

因为 $a\neq0$，方程两边都除以 a，得

$$t=\frac{v-v_0}{a}.$$

例 4 在梯形面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ 中，已知 S，b，h，且 $h\neq0$，求 a.

解：去分母，得

$$2S=(a+b)h,$$

整理，得

$$ah=2S-bh.$$

因为 $h\neq0$，方程两边都除以 h，得

$$a=\frac{2S-bh}{h}.$$

练 习

1. 在公式 $F=ma$ 中，所有字母都不等于零.

(1) 已知 F，a，求 m；(2) 已知 F，m，求 a.

2. 在公式 $v=v_0+at$ 中，所有字母都不等于零.

(1) 已知 v，a，t，求 v_0；(2) 已知 v，v_0，t，求 a.

3. 在梯形面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ 中，所有字母都是正数.

(1) 已知 S，a，b，求 h；(2) 已知 S，a，h，求 b.

习 题 9.5

A 组

解下列方程(第 1 题— 第 3 题):

1. $5a-2x=3x+10b$.

2. $(m^2+n^2)x=m^2-n^2+2mnx\ (m-n\neq 0)$.

3. $(x-a)^2-(x-b)^2=a^2-b^2\ (a-b\neq 0)$.

在下列等式中,解出 y(第 4 题— 第 6 题):

4. $3x+4y=5$.

5. $x=\frac{5}{6}y-10$.

6. $ax+by=c\ (b\neq 0)$.

7. 求出公式 $V=\frac{W}{nD}$ 中的 W(所有字母都不等于零).

8. 求出公式 $m=\frac{D}{z+2}$ 中的 D(所有字母都不等于零).

9. 在公式 $M=\frac{D-d}{2l}$ 中,所有字母都不等于零:

(1) 已知 M、l、d,求 D;

(2) 已知 M、l、D,求 d.

B 组

1. 解方程 $ax-a^3=bx-b^3\ (a\neq b)$.

2. 解方程 $b(b^2+ax)-a^2(x+2b)=b^3-2a^3\ (a\neq b, a\neq 0)$.

3. 在公式 $A=\pi r(r+l)$中,所有字母都不等于零,求 l.

4. 在公式 $E=\frac{IR}{n}+Ir$ 中,所有字母都不等于零,求 I.

9.6 可化为一元一次方程的分式方程及其应用

1. 知道分式方程的意义，会解可化为一元一次方程的分式方程，了解产生增根的原因，会检验一个数是不是分式方程的增根.
2. 会列出分式方程解简单的应用题.

1. 可化为一元一次方程的分式方程

本章一开始我们曾提出一个问题. 经分析研究，我们把问题中的数量关系列出了代数式:

$$\frac{90}{x}, \frac{60}{x-6}.$$

我们已经知道，上列代数式是分式.

根据问题中数量之间的关系，我们列出了方程:

$$\frac{90}{x} = \frac{60}{x-6}.$$

这种分母里含有未知数的方程叫做**分式方程**.以前学过的方程都是整式方程，一元一次方程是最简单的整式方程.

怎样解分式方程呢? 如果能把分式方程的分母去掉,使分式方程化成整式方程,就可以利用整式方程的解法求解了.

例如，在分式方程

$$\frac{90}{x}=\frac{60}{x-6}$$

的两边都乘以最简公分母 $x(x-6)$，得到整式方程

$$90(x-6)=60x.$$

解这个整式方程，得

$$x=18.$$

$x=18$ 是不是原来分式方程的根呢？把 $x=18$ 代入原方程检验：

$$\text{左边}=\frac{90}{18}=5,\ \text{右边}=\frac{60}{18-6}=\frac{60}{12}=5.$$

左右两边相等，说明 $x=18$ 是原方程的根.

再看另一个分式方程

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}.$$

在方程的两边都乘以最简公分母 $(x+1)(x-1)$，得整式方程

$$2(x-1)+3(x+1)=6.$$

解这个整式方程，得 $x=1$.

把 $x=1$ 代入原分式方程检验，结果 $x=1$ 使分式 $\frac{3}{x-1}$ 和 $\frac{6}{x^2-1}$ 的分母的值为零，这两个分式没有意义. 因此，1 不是原分式方程的根.

实际上，原分式方程无解.

从上面的两个例子可以看出:

(1) 为了解分式方程,就要把分式方程化为整式方程,方法是:在分式方程的两边乘以同一个含有未知数的整式,这个整式一般可取分式方程中各分式的最简公分母.

(2) 这样得到的整式方程的解有时与原分式方程的解相同,如第一个例子;有时与原分式方程的解不同,或者说产生了一个不适合原分式方程的解(或根),如第二个例子.

上面的现象是怎样产生的呢?在第一个例子中,我们在分式方程的两边乘以该方程中各个分式的最简公分母 $x(x-6)$,接着求出 $x=18$,而 $x(x-6)=216\neq 0$. 这就是说,我们是在方程两边都乘以不为零的数,因此所得的解与原分式方程的解相同.在第二个例子中,方程两边都乘以 $(x+1)(x-1)$,接着求出 $x=1$,相当于方程两边都乘以零,这样得到的整式方程的解使原分式方程中有的分式就没有意义了.

在方程变形时,有时可能产生不适合原方程的根,这种根叫做原方程的增根.前面第二个例子中求出的整式方程的根 $x=1$ 就是原分式方程的增根.因为解分式方程时可能产生增根,所以解分式方程必须检验.

怎样进行检验呢？为了简便，通常把求得的根代入变形时所乘的整式（最简公分母），看它的值是否为零，使这个整式为零的根是原方程的增根，必须舍去.

综上所述，解分式方程的一般步骤是：

1. 在方程的两边都乘以最简公分母，约去分母，化成整式方程；

2. 解这个整式方程；

3. 把整式方程的根代入最简公分母，看结果是不是零，使最简公分母为零的根是原方程的增根，必须舍去.

例 1 解方程 $\frac{5}{x}=\frac{7}{x-2}$.

解： 方程两边都乘以 $x(x-2)$，约去分母，得

$$5(x-2)=7x.$$

解这个整式方程，得

$$x=-5.$$

检验：当 $x=-5$ 时，

$x(x-2)=(-5)\times(-5-2)=35\neq 0$，所以 -5 是原方程的根.

例 2 解方程 $\frac{1}{x-2}=\frac{1-x}{2-x}-3$.

解： 方程的两边都乘以 $x-2$，约去分母，得

$$1=x-1-3(x-2).$$

解这个整式方程，得

$$x=2.$$

检验：当 $x=2$ 时，$x-2=0$，所以 2 是增根，原方程无解.

例 3 在公式 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ 中，$R\neq R_1$，求出表示 R_2 的公式.

解：公式两边都乘以 RR_1R_2，得

$$R_1R_2=RR_2+RR_1,$$

移项，得

$$R_1R_2-RR_2=RR_1,$$

$$(R_1-R)R_2=RR_1.$$

因为 $R\neq R_1$，所以 $R_1-R\neq 0$. 两边同除以 R_1-R，得

$$R_2=\frac{RR_1}{R_1-R}.$$

注意 本书中含有字母系数的分式方程，一律不要求检验.

练 习

1. 解下列方程：

(1) $\frac{x}{x-3}=2+\frac{3}{x-3}$；　(2) $\frac{x}{2x-5}+\frac{5}{5-2x}=1$；

(3) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$；　(4) $\frac{7}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{6}{x^2-1}$.

2. 在公式 $\frac{P_1}{V_2}=\frac{P_2}{V_1}$ 中，$P_1\neq 0$，求出表示 V_1 的公式.

2. 分式方程的应用

我们先来解决本章一开始提出的问题. 我们已经知道，对于这个问题，可以列出如下的分式方程.

$$\frac{90}{x}=\frac{60}{x-6}.$$

我们也已经知道，将这个方程的两边都乘以 $x(x-6)$，得到整式方程

$$90x-540=60x.$$

解得 $x=18.$

经检验，18 是所列方程的根.

由 $x=18$，得 $x-6=12.$

答：甲每小时做 18 个机器零件，乙每小时做 12 个.

下面再举例说明分式方程的应用.

例 农机厂职工到距工厂 15 千米的生产队检修农机. 一部分人骑自行车先走，40 分后，其余的人乘汽车出发，结果他们同时到达. 已知汽车的速度是自行车的 3 倍，求两种车的速度.

分析：设自行车的速度是 x 千米/时，汽车的速度是 $3x$ 千米/时. 速度、时间、路程之间的关系如下表：

	速度（千米/时）	路程（千米）	时间（时）
自行车	x	15	$\frac{15}{x}$
汽车	$3x$	15	$\frac{15}{3x}$

因为汽车晚开出 40 分$\left(\text{即 } \frac{2}{3}\text{时}\right)$与自行车同时到达，这说明行驶 15 千米，汽车比自行车少用 $\frac{2}{3}$ 时. 这说明：

汽车所用时间 = 自行车所用时间 $-\frac{2}{3}$ 时.

解：设自行车的速度为 x 千米/时，那么汽车的速度为 $3x$ 千米/时，它们行驶 15 千米所用的时间分别是 $\frac{15}{x}$ 时和 $\frac{15}{3x}$ 时，于是得

$$\frac{15}{3x}=\frac{15}{x}-\frac{2}{3},$$

即

$$\frac{5}{x}=\frac{15}{x}-\frac{2}{3}.$$

解得 $x=15$.

经检验，15 是原方程的根.

当 $x=15$ 时，$3x=45$.

答：自行车的速度是 15 千米/时，汽车的速度是 45 千米/时.

练　习

列出分式方程解下列应用题：

1. 甲做 90 个机器零件所用的时间和乙做 120 个所用的时间相等，又知每小时甲乙二人一共做 35 个机器零件. 问甲乙每小时各做多少个机器零件.
2. 用食盐 25 千克配制含盐 20% 的盐水，需加水多少千克？

习 题 9.6

A 组

1. 解下列方程:

(1) $\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6}$;

(2) $\frac{x-8}{x-7}-\frac{1}{7-x}=8$;

(3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{2x+2}$;

(4) $\frac{5x-4}{2x-4}=\frac{2x+5}{3x-6}-\frac{1}{2}$.

2. (1) $Q=N\times P\%\ (N\neq 0)$, 求 P;

(2) $M=\frac{1\,000D}{R}$, 求 D;

(3) $t=\frac{D-d}{2}$, 求 D;

(4) $R+\frac{r}{n}=S$, 求 n.

3. 某农场原有水田 400 公顷、旱田 150 公顷,为了提高单位面积产量,准备把部分旱田改为水田,改完之后,要求旱田占水田的 10%. 问应把多少公顷旱田改为水田.

4. 我部队到某桥头阻击敌人,出发时敌人离桥头 24 千米,我部队离桥头 30 千米. 我部队急行军,速度是敌人的 1.5 倍,结果比敌人提前 48 分到达,求我部队的速度.

5. 烧碱 35 克配制成浓度为 28% 的烧碱溶液,需加多少水?

B 组

1. 解下列方程:

(1) $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{x+2}{x-1}$;

(2) $\dfrac{2}{x^2+5x+6}+\dfrac{3}{x^2+x-6}=\dfrac{4}{x^2-4}$;

(3) $\dfrac{3}{x^2+8x+15}+\dfrac{5}{x^2-2x-15}=\dfrac{6}{x^2-25}$.

2. (1) $\dfrac{z-a}{b-z}=\dfrac{c}{d}$ $(c+d\neq 0)$, 求 z;

(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{b}{x}$ $(a\neq b)$, 求 x;

(3) $\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{2}{f_2}$ $(f_2\neq 2F)$, 求 f_1.

3. 某中学到离学校 15 千米的西山春游, 先遣队与大队同时出发, 行进速度是大队的 1.2 倍,以便提前半小时到达目的地做准备工作. 求先遣队与大队的速度各是多少.

4. 轮船顺水航行 80 千米所需的时间和逆水航行 60 千米所需的时间相同. 已知水流的速度是 3 千米 / 时,求轮船在静水中的速度.

小结与复习

一、内容提要

1. 本章内容是分式的概念及其基本性质、分式的运算以及分式方程的解法和应用.

2. 分式及其有关内容都可以和分数及其有关内容对比着学习.

和分数一样,形如 $\frac{A}{B}$ 的式子叫做分式,其中 A,B 是整式,B 必须含有字母.

$\frac{A}{B}$ 表示 $A\div B$ 所得的商,因此,B 的值不能为零,这是分式概念中的一个要点.

3. 分式的基本性质是

$$\frac{A}{B}=\frac{AM}{BM}\ (M\neq 0).$$

它是分式运算的重要依据. 在学习分式基本性质的基础上,与分数对比着学习了分式的约分、通分以及分式的四则运算.

4. 根据需要,一个公式有时变换成不同的形式,这就是公式变形. 公式变形往往是解含有字母系数的方程.解字母系数的方程和解数字系数的方程类似.

5. 解分式方程的一般步骤是:

(1) 在方程的两边都乘以最简公分母,约去分母,化成整式方程;

(2) 解这个整式方程;

(3) 把整式方程的根代入最简公分母,看结果是不是零,使最简公分母为零的根是原方程的增根,应舍去.

二、学习要求

1. 了解分式、有理式的概念.

2. 了解最简分式、最简公分母的概念,掌握分式的基本性质,能够熟练地进行约分、通分.

3. 掌握分式的乘、除、乘方与加、减的运算法则,能进行简单的分式运算.

4. 掌握含有字母系数的一元一次方程的解法,会进行简单的公式变形.

5. 了解分式方程的概念,掌握可化为一元一次方程的分式方程的解法,了解增根的概念,会检验一个数是不是分式方程的增根.

6. 会列出可化为一元一次方程的分式方程解简单的应用题.

三、需要注意的几个问题

1. 在了解分式的概念时,有两点要特别注意:

(1) 形如 $\frac{A}{B}$(A、B 为整式)的式子叫做分式,这一点与分数的概念类似. 但在分式的概念中,B 中含有字母,这是与分数概念的根本区别.

(2) $\frac{A}{B}$ 表示 $A \div B$ 所得的商,因此,B 的值不能为零,这一点与分数的概念也类似.在分数中,分母不能为零,比较容易理解和掌握,但在分式中,分母不能为零,理解上较容易,掌握就比较困难.B 的值不能为零,在分式概念中是一个要点,这是因为,如果 B 为零,那么分式就没有意义了. 因此,在学习时,要自始至终注意这个问题.

2. 分式的基本性质、分式的约分与通分、分式的四则运算等,都与分数相应内容类似,对比着学习是有益的. 因此,如对分数的有关内容有所遗忘,就应注意复习.

3. 解可化为一元一次方程的分式方程的步骤,与解一元一次方程的步骤相似.实际上多了两步.第一步是在方程的两边都乘以最简公分母,约去分母,化成整式方程,以下解整式方程. 由于多了第一步,所以最后一步应有检验,把所得结果代入最简公分母,看是不是零,使最简公分母为零的根是原方程的增根,应舍去.

复习题九

A 组

1. 下列各有理式中，哪些是整式，哪些是分式？

3，$\frac{1}{x}$，$3+\frac{1}{x}$，$\frac{x^2-y^2}{2}$，$\frac{1}{\pi}(x+y)$，

$\frac{1}{y}(z+x)$，$\frac{1}{x+1}$，$\frac{x^2+1}{2x}$，$\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}$.

2. 填空：当 x 为_____时，$\frac{1}{3-x}$ 的值为正.

3. 填空：当 x 为_____时，$\frac{-x^2}{x^2+1}$ 的值为负.

4. 当 x 取什么数时，下列分式有意义？

(1) $\frac{x-1}{x-3}$；

(2) $\frac{x+1}{2x+3}$；

(3) $2-\frac{2}{2-x}$；

(4) $1+\frac{x+1}{x-1}$.

5. x 是什么数时，

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$

的值是零？

6. 计算:

(1) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}$;

(2) $\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{a}{a-b}$;

(3) $\dfrac{a-b}{ab}+\dfrac{b-c}{bc}+\dfrac{c-a}{ca}$;

(4) $\dfrac{a^2+7a+10}{a^2-a+1}\cdot\dfrac{a^3+1}{a^2+4a+4}\div\dfrac{a^2+6a+5}{a+2}$;

(5) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$;

(6) $\dfrac{a^2+5a+4}{a^2+a-6}\div\dfrac{a^2+3a-4}{a^2-6a+8}-1$.

7. 计算:

(1) $1\div\left(x-\dfrac{x^2-1}{x^3}\right)$;

(2) $\dfrac{x-1}{x}\div\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.

8. (1) 已知 $H=\dfrac{d^2Sn}{12\,000}$ $(n\neq 0,d\neq 0)$, 求 S;

(2) 已知 $\dfrac{U-V}{R}=\dfrac{V}{S}$ $(R+S\neq 0)$, 求 V;

(3) 已知 $e=\dfrac{m-a}{n-a}$ $(e\neq 1)$, 求 a.

9. 解下列方程:

(1) $\frac{7}{x^2+x}+\frac{3}{x^2-x}=\frac{6}{x^2-1}$;

(2) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-4x+4}+\left(1+\frac{2}{x-2}\right)^2=\frac{2x}{x-2}$.

列方程解下列问题(第 10 ~ 12 题):

10. 某煤矿现在平均每天比原计划多采 330 吨煤,已知现在采 33 000 吨煤所需的时间和原计划采 23 100 吨煤的时间相同.问现在平均每天采煤多少吨.

11. 我军某部由驻地到距离 30 千米的地方去执行任务,由于情况发生了变化,行军速度必须是原计划速度的 1.5 倍,才能按要求提前 2 小时到达.求急行军的速度.

12. 一台电子收报机,它的译电效率相当于人工译电效率的 75 倍,译电 3 000 个字比人工少用 2 小时 28 分.这台收报机与人工每分各译电多少字?

B 组

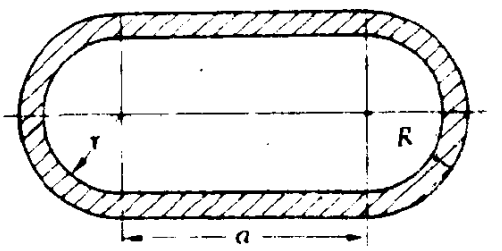
1. 计算 $\frac{2x+4}{x^2-4x+4}\div\frac{x^3+8}{2x-4}\cdot(x^2-4)$.

2. 计算 $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

3. 由公式 $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$,推出 $R=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}(r_1+r_2\neq 0)$.

4. 解方程 $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$.

5. 用代数式表示图中阴影部分的面积. 已知这个面积是 S, 用 S, R, r 的代数式表示 a.



(第 5 题)

自我测验九

（满分 100 分，时间 45 分）

1. (每空 4 分，共 20 分)填空：

(1) 用 A、B 表示两个整式，$A \div B$ 就可以表示成____的形式，如果除式 B 中____，该式就叫做分式；

(2) 当 x____时，分式 $\frac{x+1}{3x-2}$ 有意义，当 x____时，分式 $\frac{x+1}{3x-2}$ 的值为零；

(3) 在 $v=v_0+at$ 中，已知 v，v_0，a，且 $a\neq 0$，则 $t=$____.

2. (每小题 5 分，共 30 分)计算：

(1) $\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x-y}$；

(2) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2y+xy^2}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y-xy^2}$；

(3) $\frac{x^2-y^2}{xy}\div(x+y)$；

(4) $a+2+\frac{4}{a+2}$；

(5) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^2\cdot\left(-\frac{b^2}{a}\right)^3\div\left(-\frac{b}{a}\right)^4$；

(6) $\frac{2x}{2x-y}+\frac{y}{y-2x}$.

3. (每小题 5 分，共 10 分)计算：

(1) $\left(1+\frac{y}{x}\right)\div\left(1-\frac{y}{x}\right)$；

(2) $\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x}{x^2-1}$.

4. (每小题5分,共10分):

(1) 如果 $\frac{x+1}{x^2-3}=\frac{1}{x}$,求 x;

(2) 如果 $\frac{x-y}{y}=\frac{1}{2}$,求 $\frac{x}{y}$.

5. (每小题7分,共14分)解下列方程:

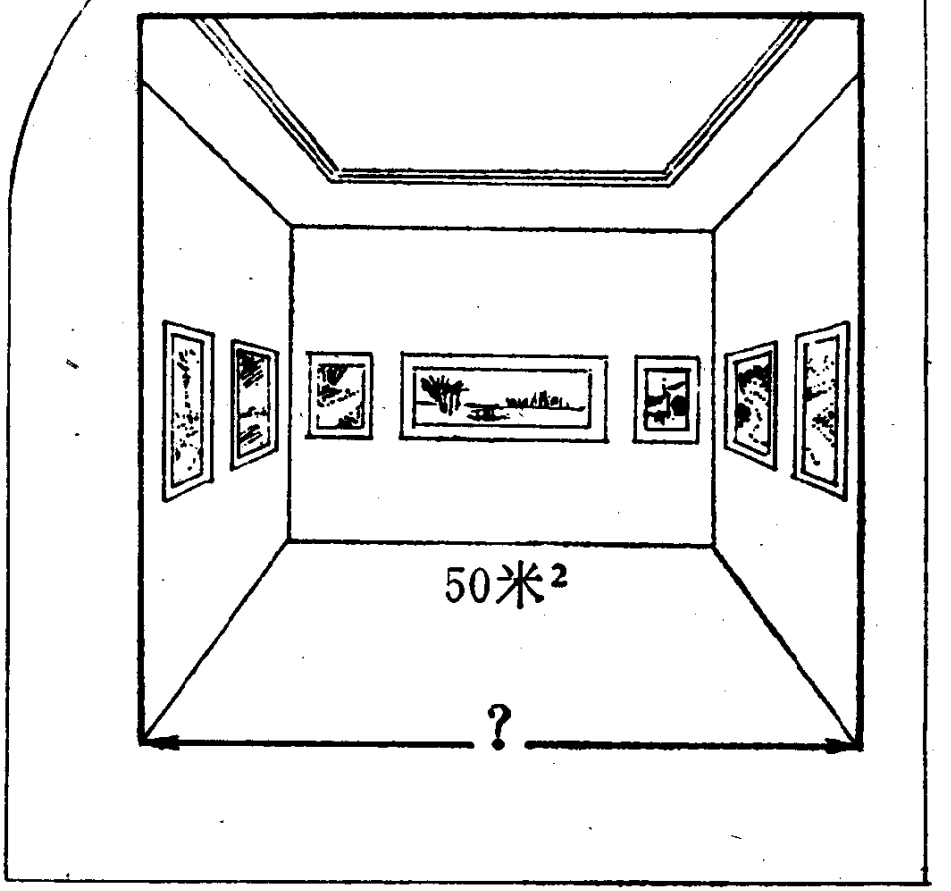
(1) $\frac{x}{a}-b=\frac{x}{b}-a\ (a\neq b)$;

(2) $\frac{x}{2x-5}+\frac{5}{5-2x}=1$.

6. (16分)甲做180个机器零件与乙做240个机器零件所用的时间相同,已知两人每小时共做70个机器零件,两人每小时各做多少个?

第十章

数的开方



我们来看下面的问题:

左图是一个面积为 50 平方米的正方形展厅，它的边长应是多少?

一只容积为 0.125 立方米的正方体木箱，它的棱长应是多少?

一个数的平方等于 1 000，这个数是多少?

这些问题的共同特点是:已知乘方的结果(即幂)的值，求底数的值. 为了解决这些问题，就要进行乘方运算的逆运算，也就是要进行开方运算.

在这一章里，我们来学习数的开方和实数的初步知识.

10.1 平方根

1. 知道一个数的平方根和算术平方根的意义.
2. 会用根号表示一个数的平方根和算术平方根.

一个数的平方是 9，那么这个数是什么数？

因为　　$3^2=9$，　　$(-3)^2=9$，

所以这个数是 3 或 -3.

又如，一个数的平方是 $\frac{4}{25}$，因为

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}，\qquad \left(-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}，$$

所以这个数是 $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$.

一般地，如果一个数的平方等于 a，这个数就叫做 a 的**平方根**（或**二次方根**）.就是说，如果 $x^2=a$，那么 x 就叫做 a 的平方根.

上面，3 与 -3 都是 9 的平方根，$\frac{2}{5}$ 与 $-\frac{2}{5}$ 都是 $\frac{4}{25}$ 的平方根.

想一想，100 的平方根是什么数，$\frac{1}{100}$ 呢？

从上面看到，正数的平方根有两个.你能发现这两个数之间有什么关系吗？

可以看出，正数的两个平方根互为相反数，例如 9 的平方根 3 与 -3 互为相反数.

因为 $0^2=0$，而且任何不为 0 的数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根有一个，它就是 0 本身.

负数有平方根吗？

因为正数、0、负数的平方都不是负数，所以负数没有平方根. 例如，-4 没有平方根.

一个正数有两个平方根，它们互为相反数；

0 有一个平方根，它是 0 本身；

负数没有平方根.

求一个数 a 的平方根的运算，叫做**开平方**.

我们看到，3 与 -3 的平方都是 9，9 的平方根是 3 与 -3. 就是说，平方与开平方互为逆运算. 根据这种运算关系，我们可以通过平方运算来求一个数的平方根，以及检验一个数是不是另一个数的平方根.

一个正数 a 的正的平方根，用符号“$\sqrt[2]{a}$”表示，a 叫做**被开方数**，2 叫做**根指数**. 正数 a 的负的平方根，用符号“$-\sqrt[2]{a}$”表示. 这两个平方根合起来可以记作“$\pm\sqrt[2]{a}$”. 这里，符号“$\sqrt[2]{\ }$”读作“二次根号”，$\sqrt[2]{a}$ 读作“二次根号 a”. 根指数是 2 时，通常将这个 2 省略不写，如，$\sqrt[2]{a}$ 记作 $\sqrt{a}$，读作“根号 a”；$\pm\sqrt[2]{a}$ 记作 $\pm\sqrt{a}$，读作“正、负根号 a”.

例 1 求下列各数的平方根:

(1) 81; (2) $\frac{16}{25}$; (3) $2\frac{1}{4}$; (4) 0.49.

解: (1) ∵ $(\pm 9)^2=81$,

∴ 81 的平方根是 ± 9,即

$$\pm\sqrt{81}=\pm 9;$$

(2) ∵ $\left(\pm\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$,

∴ $\frac{16}{25}$ 的平方根是 $\pm\frac{4}{5}$,即

$$\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5};$$

(3) ∵ $2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$, $\left(\pm\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,

∴ $2\frac{1}{4}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{2}$, 即

$$\pm\sqrt{2\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2};$$

(4) ∵ $(\pm 0.7)^2=0.49$,

∴ 0.49 的平方根是 ± 0.7,即

$$\pm\sqrt{0.49}=\pm 0.7.$$

注意 正数的平方根有两个,例如 81 的平方根是 $\pm\sqrt{81}$, $\sqrt{81}$ 只是其中的一个正根.

例 2 下列各数有平方根吗? 如果有,求出它的平方根;如果没有,要说明理由.

(1) -64; (2) 0; (3) $(-4)^2$; (4) 10^{-2}.

解：(1)因为 -64 是负数，所以 -64 没有平方根；

(2) 0 有一个平方根，它是 0；

(3) 因为 $(-4)^2=16>0$，所以 $(-4)^2$ 有两个平方根，且 $\pm\sqrt{(-4)^2}=\pm\sqrt{16}=\pm4$；

(4) 因为 $10^{-2}=\frac{1}{10^2}>0$，所以 10^{-2} 有两个平方根，且

$$\pm\sqrt{10^{-2}}=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\pm\frac{1}{10}.$$

想一想：为什么 $\sqrt{(-4)^2}\neq-4$？

练 习

1. 检验下面各题中前面的数是不是后面的数的平方根：

(1) ±12，144；　　(2) ±0.2，0.04；

(3) 10^2，10^4；　　(4) 14，256.

2. 求下列各数的平方根：

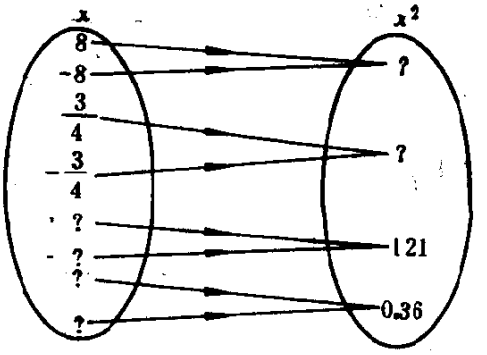
49，1 600，169，$\frac{16}{49}$，$\frac{25}{64}$，0.81，0.008 1，10^{-6}.

3. 判断下列说法是否正确：

(1) 0 的平方根是0；　　(2) 1 的平方根是1；

(3) -1 的平方根是 -1；　　(4) $(-1)^2$ 的平方根是-1.

4. 如图，求左圈和右圈中的“?”表示的数：



(第4题)

我们知道，正数 a 有两个平方根，其中正数 a 的正的平方根，也叫做 a 的**算术平方根**，记作 $\sqrt{a}$. 例如 9 的算术平方根是 3，即 $\sqrt{9}=3$. 又如 $\sqrt{16}=4$，$\sqrt{0.01}=0.1$ 等. 由于正数 a 的两个平方根互为相反数，当已知它的算术平方根 $\sqrt{a}$ 时，可以立即写出它的负平方根 $-\sqrt{a}$.

0 的平方根也叫做 **0 的算术平方根**，由此可知，**0 的算术平方根是 0**，即 $\sqrt{0}=0$.

注意 当 a 是正数或 0（又叫做非负数）时，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根.

例 3 求下列各数的算术平方根：

(1) 100；　(2) $\frac{49}{64}$；　(3) 0.81.

解：(1) ∵ $10^2=100$，

∴ 100 的算术平方根是 10，即

$$\sqrt{100}=10;$$

(2) ∵ $\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$，

∴ $\frac{49}{64}$ 的算术平方根是 $\frac{7}{8}$，即

$$\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8};$$

(3) ∵ $0.9^2=0.81$，

∴ 0.81 的算术平方根是 0.9，即

$$\sqrt{0.81}=0.9.$$

注意 100的平方根是10和-10,而它的算术平方根是10.

例4 求下列各式的值:

(1) $\sqrt{10\,000}$; (2) $-\sqrt{144}$; (3) $\sqrt{\frac{25}{121}}$;

(4) $-\sqrt{0.0001}$; (5) $\pm\sqrt{625}$; (6) $\pm\sqrt{\frac{49}{81}}$.

分析:求$\sqrt{10\,000}$,就是求10 000的算术平方根;求$-\sqrt{144}$,就是求144的算术平方根的相反数;求$\pm\sqrt{625}$,就是求625的平方根.

解: (1) $\because$ $100^2=10\,000$,

$\therefore$ $\sqrt{10\,000}=100$;

(2) $\because$ $12^2=144$,

$\therefore$ $-\sqrt{144}=-12$;

(3) $\because$ $\left(\frac{5}{11}\right)^2=\frac{25}{121}$,

$\therefore$ $\sqrt{\frac{25}{121}}=\frac{5}{11}$;

(4) $\because$ $(0.01)^2=0.0001$,

$\therefore$ $-\sqrt{0.0001}=-0.01$;

(5) $\because$ $25^2=625$,

$\therefore$ $\pm\sqrt{625}=\pm25$;

(6) $\because$ $\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$,

$\therefore$ $\pm\sqrt{\frac{49}{81}}=\pm\frac{7}{9}$.

注意 由于正数的算术平方根是正数，零的算术平方根是零，可将它们概括成：非负数的算术平方根是非负数，即当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}\geqslant 0$（当 $a<0$ 时，$\sqrt{a}$ 无意义）.

练 习

1. 判断下列说法是否正确：
   (1) 5 是 25 的算术平方根；
   (2) ± 4 是 16 的算术平方根；
   (3) -6 是 $(-6)^2$ 的算术平方根；
   (4) 0.01 是 0.1 的算术平方根.
2. 下列各式中哪些有意义？哪些无意义？
   (1) $-\sqrt{3}$；　　(2) $\sqrt{-3}$；
   (3) $\sqrt{(-3)^2}$；　　(4) $\sqrt{10^{-3}}$.
3. 求下列各数的算术平方根和平方根：
   121，0.25，400，0.01，$\frac{1}{256}$，$\frac{144}{169}$，0，10^{-4}.
4. (1) 在公式 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 中，已知 $a=6,b=8$，求 c；
   (2) 在公式 $a=\sqrt{c^2-b^2}$ 中，已知 $c=41,b=40$，求 a.
5. 求下列各式的值：
   $\sqrt{1}$，$-\sqrt{\frac{4}{9}}$，$\sqrt{1.21}$，$-\sqrt{0.0196}$，
   $\pm\sqrt{\frac{9}{25}}$，$\pm\sqrt{\frac{36}{169}}$.

习 题 10.1

A 组

1. 负数有没有平方根？正数的平方根可以是负数吗？
2. 说出 121，144，169，196，225，256，289，324，361 的平方根.
3. 求下列各数的平方根和算术平方根：

   3 600，$\frac{1}{64}$，10 000，7.29，0.04，$\frac{121}{289}$，$1\frac{11}{25}$.
4. 求下列各式的值：

   $\sqrt{0}$，$-\sqrt{81}$，$\sqrt{0.09}$，$\sqrt{(-25)^2}$，$\pm\sqrt{\frac{25}{36}}$，$\sqrt{10^{-6}}$.
5. 求下列各式中的 x：

   (1) $x^2=25$；　　(2) $x^2-81=0$；

   (3) $4x^2=49$；　　(4) $25x^2-36=0$.
6. 求下列各式的值：

   (1) $3\sqrt{25}$；　　(2) $\sqrt{81}+\sqrt{36}$；

   (3) $\sqrt{0.04}-\sqrt{0.25}$；　　(4) $\sqrt{0.36}\cdot\sqrt{\frac{4}{121}}$.
7. 要切一块面积为 $16m^2$ 的正方形钢板，它的边长是多少？

B 组

1. x 为何值时，下列各式有意义？

   (1) $\sqrt{2x}$；　(2) $\sqrt{-x}$；　(3) $\sqrt{x^2}$.
2. 已知 $a\geqslant 0$，$(\sqrt{a})^2$ 等于什么？

想一想

一个正整数的平方是一位数或两位数，这个正整数是几位数？平方是三位数或四位数的正整数是几位数？平方是五位数或六位数的正整数呢？

10.2 平方根表●

会查平方根表求一个数的平方根.

前面我们通过平方运算观察得出了一些特殊的有理数的平方根.但在多数情况下,一个正有理数并不能表示成另一个有理数的平方,而只能得到它的平方根的近似值.例如,我们找不到这样一个有理数,它的平方等于2,也就是找不到一个等于 $\sqrt{2}$ 的有理数. 不过,这时我们可以设法求得它的有任何精确度要求的近似值:

$\because$ $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$,

$\therefore$ $1.4<\sqrt{2}<1.5$;

$\because$ $1.41^2=1.9881$, $1.42^2=2.0164$,

$\therefore$ $1.41<\sqrt{2}<1.42$;

$\because$ $1.414^2=1.999\,396$, $1.415^2=2.002\,225$,

$\therefore$ $1.414<\sqrt{2}<1.415$;

…… ……

如此进行下去,可以得到更精确的 $\sqrt{2}$ 的近似值.

用上述方法求数的平方根较为麻烦,为迅速求得数的平方根,本节介绍《平方根表》的查法.

● 这一章介绍两种平方根和立方根的求法,以供选用:有条件的学校可用计算器直接求,条件暂不具备的学校可通过查平方根表和立方根表来求.

《中学数学用表》里的《平方根表》,列出了从 1.00 到 99.9 的三个数位的数的算术平方根(一般是近似值)及其修正值,从中可以查到(最多)有四个有效数字的数的算术平方根.下面是平方根表的两个部分.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221	0	1	1	2	2	2	3	3	4

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240	3.256	3.271	3.286	3.302	1	3	5	6	8	9	11	12	14
11.	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391	3.406	3.421	3.435	3.450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12.	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536	3.550	3.564	3.578	3.592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13.	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661	3.674	3.688	3.701	3.715	3.728	1	3	4	5	7	8	10	11	12
14.	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795	3.808	3.821	3.834	3.847	3.860	1	3	4	5	7	8	9	11	12

表中字母"N"所在的直列中的数是被开方数的前两位数,"N"所在的横行中的数是被开方数的第三位数,表中间的四位数是所求的算术平方根,它的第四位数一般是四舍五入得到的.表右边的部分是修正值.

例 1 查表求$\sqrt{1.35}$.

N		5	
		↓	
1.3	→	1.162	

解: 查 1.3 所在的横行和 5 所在的直列,交叉处得 1.162.

∴ $\sqrt{1.35}=1.162$.

注意 查表所得结果，虽多为近似值，一般仍用等号.

例 2 查表求 $\sqrt{13.5}$.

解：查 13 所在的横行和 5 所在的直列，交叉处得 3.674.

N		5	
		↓	
13	→	3.674	

∴ $\sqrt{13.5}=3.674$.

注意 查平方根表时，必须注意被开方数的小数点的位置，例如 1.35 与 13.5 两个数的小数点位置不同，在查表时所取的横行是不同的.

练 习

1. 查表求下列各数的算术平方根：

(1) 9.73; (2) 97.3; (3) 38.5; (4) 3.85;
(5) 6.8; (6) 68; (7) 5; (8) 4.04.

2. 查表求下列各式的值：

(1) $\sqrt{2}$; (2) $\sqrt{60}$; (3) $\sqrt{95}$;
(4) $-\sqrt{9.5}$; (5) $\sqrt{1.48}$; (6) $\sqrt{70.4}$;
(7) $-\sqrt{47.3}$; (8) $-\sqrt{8.47}$.

如果被开方数是1.000到99.99之间的有四个数位的数，应该先查出前三位数的平方根，再加上根据第四位数查得的修正值.

例3　查表求$\sqrt{1.354}$和$\sqrt{14.02}$.

被开方数1.354是1.000到99.99之间的四位数，求$\sqrt{1.354}$时，先查得$\sqrt{1.35}=1.162$，然后再查得4的修正值是2，这里的2，表示0.002，就是说应在1.162的最后一位上加上2，所以$\sqrt{1.354}=1.162+0.002=1.164$.

解：$\sqrt{1.354}=1.162+0.002=1.164$;

$\sqrt{14.02}=3.742+0.003=3.745$.

如果被开方数是多于四个数位的数，可先把这个数四舍五入成四个数位的数，再查表.

例4　查表求$\sqrt{71.236}$和$\sqrt{2.3142}$.

解：$\sqrt{71.236}\approx\sqrt{71.24}=8.438+0.002$

$=8.440$;

$\sqrt{2.3142}\approx\sqrt{2.314}=1.520+0.001$

$=1.521$.

练　习

查表求下列各式的值：

(1) $\sqrt{4.357}$；　(2) $\sqrt{95.42}$；　(3) $\sqrt{5.174}$；

(4) $\sqrt{51.74}$；　(5) $\sqrt{22.469}$；　(6) $\sqrt{5.0302}$.

上面看到，1 与 100 之间的数的算术平方根可直接查表求得．那么，小于 1 或大于 100 的正数的算术平方根，是否也可以通过查这个表求得呢？

首先，我们来看下表：

n	0.04	4	400	40 000
$\sqrt{n}$	0.2	2	20	200

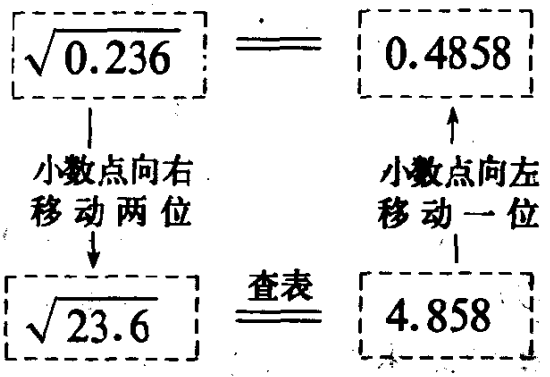
可以看出，如果将一个数增加到原来的 100 倍，它的算术平方根就增加到原来的 10 倍；反过来，如果将一个数缩小到原来的$\frac{1}{100}$，它的算术平方根就缩小到原来的$\frac{1}{10}$．也就是说，**如果正数的小数点向右或者向左移动 2 位，它的算术平方根的小数点就相应地向右或者向左移动 1 位．**

根据这个性质，我们可以通过移动数的小数点位置，将求小于 1 或大于 100 的数的平方根，先化成求大于 1 小于 100 的数的平方根，然后再查表．应该注意，小数点的位置一定要两位两位地移动，移到使被查的数成为有一位或者两位整数的数．被开方数的小数点每移动两位，查得的平方根的小数点应该向相反方向移动一位．

例 5　查表求下列各式的值：

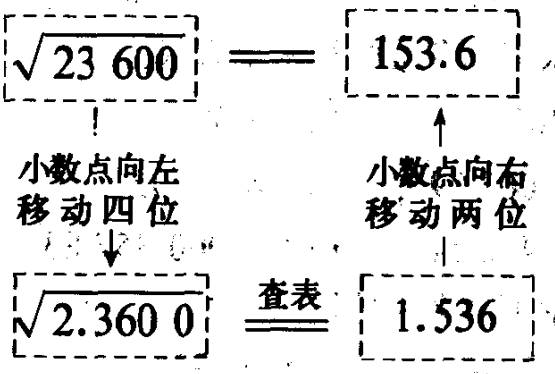
(1) $\sqrt{0.236}$；　　(2) $\sqrt{23\ 600}$．

解： (1)



$\therefore \quad \sqrt{0.236} = 0.4858;$

(2)



$\therefore \quad \sqrt{23\ 600} = 153.6.$

练　习

1. 一个数的平方是 1 000，这个数是多少（精确到 0.01）？

2. 查表求下列各式的值：

(1) $\sqrt{0.0415}$；　(2) $-\sqrt{0.001289}$；　(3) $\sqrt{0.38087}$；

(4) $\sqrt{64\ 090}$；　(5) $-\sqrt{725}$；　(6) $\sqrt{5\ 710\ 052}$；

(7) $\sqrt{\frac{8}{25}}$；　(8) $\sqrt{170\frac{3}{4}}$.

3. 求下列各式中的 x：

(1) $x^2=169$；　(2) $3x^2=5$（精确到 0.01）.

习 题 10.2

A 组

1. 查表求下列各数的算术平方根:

(1) 10; (2) 13; (3) 97.8; (4) 1.23;

(5) 1.491; (6) 14.91; (7) 5.869; (8) 58.69.

2. 选择题❶:查表求得 $\sqrt{0.001\,045}$ 等于(　　)

(A) 3.233. (B) 0.323 3.

(C) 0.032 33. (D) 0.003 233.

3. 查表求下列各数的算术平方根:

(1) 867; (2) 7 590; (3) 0.075 9;

(4) 0.003 094; (5) 87 420;

(6) 0.462 54; (7) 0.000 357 83.

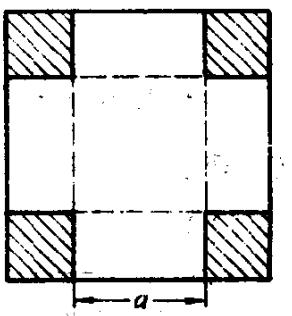
4. 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt{3.63}$; (2) $\sqrt{17.6}$; (3) $-\sqrt{2.248}$;

(4) $\pm\sqrt{48.55}$; (5) $\sqrt{0.2157}$; (6) $-\sqrt{0.092\,86}$;

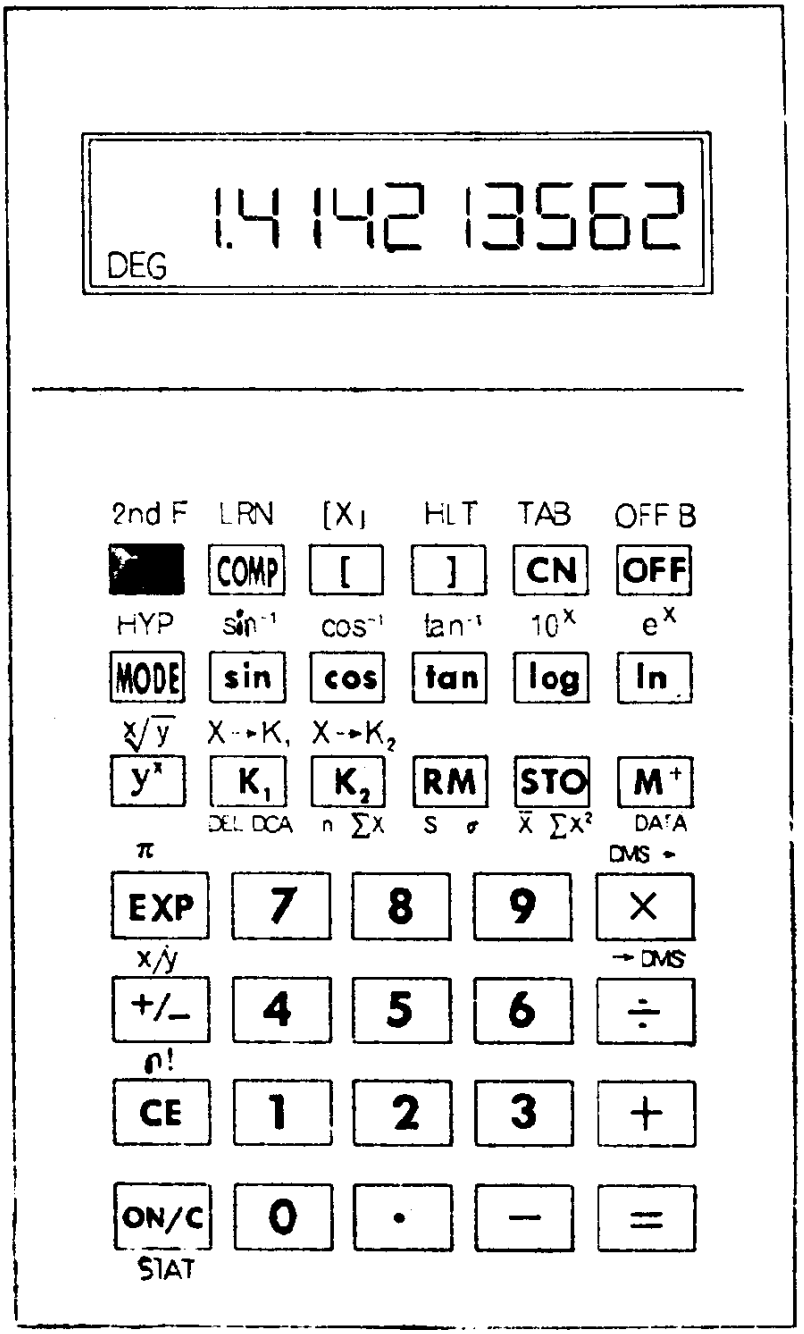
(7) $\sqrt{278\frac{3}{4}}$; (8) $\pm\sqrt{6\,665.72}$.

5. 如图,面积为30m^{2}的正方形的四个角是面积为2m^{2}的小正方形.查表求a的长(精确到0.1m).



(第5题)

❶ 在本书中,选择题是这样一类习题:对所提出的问题分别给出了四种不同的答案,且其中只有一个答案是正确的,要求从中选出你认为正确的一个答案,不能多选.



CZ1206 电子计算器面板图

图 10－1

10.3 用计算器进行数的简单计算●

会用计算器进行数的加、减、乘、除、乘方和开平方计算.

电子计算器(简称计算器)是一种体积小、运算快、操作简便的计算工具.在这一章里,将介绍用计算器●进行数的加、减、乘、除、乘方和开方计算的方法.

如图 10－1,计算器的面板由键盘和显示器组成.

在键盘的每个键上,标明了这个键的功能.例如,键 ON/C 是开机键,使用计算器时先要按一下这个键,以接通计算器的电源;OFF 是关机键,停止使用计算器时要按一下这个键,以切断计算器的电源;+ 是加法运算键,按这个键表示进行加法运算;等等.有些键的旁边标明这些键还兼有别的功能.

显示器是用来显示计算时输入的数据和计算结果的装置.不同的计算器,显示器所能显示的数的位数不尽相同.图 10－1 所示的计算器,显示的数的位数最多有 10 个.例如 3÷7,显示的得数是 0.428571429.

● 本节与 10.6 节是选学内容.

● 计算器按功能的多少分为简单计算器、科学计算器等几种类型.根据中学学习的需要,这里着重介绍的是科学计算器.

下面举例说明用计算器进行计算的操作方法.

例 1 用计算器求38＋26.

解:用计算器求 38＋26 的过程可用下表表示:

按　　键	显　　示
3 8	38.
+	38.
2 6	26.
=	64.

∴　　38＋26＝64.

从表中看到,第一步是输入数据 38,这时要依次按数字键 3、8 ;第二步是按加法运算键;第三步是输入数据 26;第四步是按等号键,显示器上显示出得数 64.

注意　输入一个多位数时,按键的顺序是从高位依次到低位.例如输入 358 时,依次按键 3、5、8.

例 2 用计算器求125－215.

解:

按　　键	显　　示
1 2 5	125.
−	125.
2 1 5	215.
=	−90.

∴　　125－215＝－90.

注意 显示器上表示负号的横线较短,在进行较复杂计算时尤其要仔细看清.

例3 用计算器求0.425×16.

输入数据0.425时,按键的顺序依次是 [0] [·] [4] [2] [5] ,也可以将前面的 [0] 省略.

解:

按　　键	显　　示
[0] [·] [4] [2] [5]	0.425
[×]	0.425
[1] [6]	16.
[=]	6.8

∴ $0.425\times16=6.8$.

例4 用计算器求$(-40.5)\div2.5$.

输入(-40.5)的办法是先输入40.5,然后按符号变换键 [+ /−] .

解:

按　　键	显　　示
[4] [0] [.] [5] [+/-]	−40.5
[÷]	−40.5
[2] [·] [5]	2.5
[=]	−16.2

∴ $(-40.5)\div2.5=-16.2$.

例 5　用计算器求 $60+4\times25$.

按键的顺序，可以与式子书写的顺序完全一样.

解:

按　　键	显　　示
[6] [0]	60.
[+]	60.
[4]	4.
[×]	4.
[2] [5]	25.
[=]	160.

$\therefore$　　$60+4\times25=160.$

练　习

用计算器求下列各式的值:

1. (1) $5+7$;　　(2) $105+23$;
   (3) $0.25+1.38$;　　(4) $20-35$;
   (5) $1025-384$;　　(6) $1.24-5.37$;
   (7) 14×15;　　(8) 0.19×0.25;
   (9) 37×0.0035;　　(10) $169\div13$;
   (11) $16.8\div40$;　　(12) $0.125\div0.2$;
   (13) $(-13)\times2$;　　(14) $625\div(-25)$;
   (15) $1+2+3$;　　(16) $20-5-8$;
   (17) $0.1\times0.2\times0.5$;　　(18) $100\div20\div5$;
   (19) $2\times18+4$;　　(20) $50\div2-20\times2$.

例 6 用计算器求 15^2.

求一个数的正整数次幂,要用乘幂运算键 $\boxed{y^x}$.

解:

按　　键	显　　示
1 5	15.
y^x	15.
2	2.
=	225.

$\therefore \quad 15^2 = 225.$

注意 求一个数的平方还可以利用乘法运算键 $\boxed{\times}$. 例如求15^2时,按键顺序可以是 $\boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}$.

例 7 用计算器求6^3.

解:

按　　键	显　　示
6	6.
y^x	6.
3	3.
=	216.

$\therefore \quad 6^3 = 216.$

注意 一般地,求一个正数的 n 次方,都可以按照上面的步骤进行.例如求 2^6,按键顺序是 $\boxed{2}$、$\boxed{y^x}$、$\boxed{6}$、$\boxed{=}$,显示的结果是64. 求负数的 n 次方,可以先求这个数的相反数的 n 次方, 如果 n 是奇数,再在所得结果前面加上负号.

例 8 用计算器求$\sqrt{16}$.

在图 10－1 所示的计算器键盘第 3 行左起的第 1 个键，除具有乘幂运算功能外，还具有开方运算功能. 在计算过程中，如果按这个键之前先按第二功能选择键 [2nd]，那么就可以让计算器执行开方运算功能●.

解：用计算器求$\sqrt{16}$的步骤如下：

按　　键	显　　示
[1] [6]	16.
[2nd]	2F
[$\sqrt[y]{x}$]	16.
[2]	2.
[=]	4.

$\therefore \quad \sqrt{16}=4.$

例 9　用计算器求$\sqrt{1.354}$（结果保留 4 个有效数字）.

解：

按　　键	显　　示
[1] [.] [3] [5] [4]	1.354
[2nd]	2F
[$\sqrt[y]{x}$]	1.354
[2]	2.
[=]	1.163615057

● 在一般简单计算器和有些科学计算器上设有开平方运算键，直接按这个键即可执行开平方运算.

因为计算结果要求保留 4 个有效数字，所以

$$\sqrt{1.354} \approx 1.164.$$

注意 在遇到开方开不尽的情况时，如无特别说明，计算结果一律保留四个有效数字.

练 习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) 12^2；　　(2) 101^2；

(3) 2.4^2；　　(4) 0.038^2；

(5) 5^3；　　(6) 13^3；

(7) 0.8^3；　　(8) 2.1^3；

(9) 2^4；　　(10) 0.1^4；

(11) 10^5；　　(12) 3^6.

2. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{49}$；　　(2) $\sqrt{0.81}$；

(3) $\sqrt{1369}$；　　(4) $\sqrt{1.5376}$；

(5) $\sqrt{5}$；　　(6) $\sqrt{0.24}$；

(7) $\sqrt{352}$；　　(8) $\sqrt{35\,200}$；

(9) $\sqrt{12.34}$；　　(10) $\sqrt{0.038\,1}$；

(11) $\sqrt{0.3879}$；　　(12) $-\sqrt{101.38}$.

习 题 10.3

A 组

1. 用计算器求下列各式的值:

(1) $48+49$;　　(2) $0.417+2.362$;

(3) $(-3.42)+1.491$;　　(4) $0.35-0.014$;

(5) $-(4\,762+5\,381)$;　　(6) $102.3-217.05$;

(7) 20×19;　　(8) 0.035×47;

(9) $7.82\div 4$;　　(10) $4.25\div 0.05$;

(11) $(-2.35)\times(-0.46)$;　　(12) $2\,500\div(-4)$;

(13) $1\,236+4\,317+7\,832$;

(14) $2.31-0.38-1.87$;

(15) $25\times 24\times 23$;

(16) $1\,200\div 20\div 5$;

(17) $9.2\times 3+10.2$;

(18) $0.84\div 4+0.79\times 2$.

2. 用计算器求下列各式的值:

(1) 1.8^2;　　(2) 0.46^2;

(3) 237^2;　　(4) 0.101^2;

(5) 11^3;　　(6) 9.9^3;

(7) -0.3^3;　　(8) 0.02^3;

(9) 1.1^4;　　(10) 0.21^4;

(11) 5^5;　　(12) -9^6.

3. 用计算器求解第 10.2 节练习和习题中的各题.

10.4 立方根

1. 知道一个数的立方根的意义.
2. 会用根号表示一个数的立方根.

前面我们提出过这样的问题:

要做一只正方体的木箱,使它的容积是0.125立方米,这个木箱的棱长应当是多少米?

因为正方体的容积等于棱长的立方,如果设棱长为 x 米,根据题意,得

$$x^3=0.125.$$

这就是要求出一个数,使它的立方等于0.125.因为 $0.5^3=0.125$,所以,这个正方体木箱的棱长是0.5米.

一般地,如果一个数的立方等于 a,这个数就叫做 a 的**立方根**(也叫做**三次方根**).换句话说,如果 $x^3=a$,那么 x 叫做 a 的立方根.数 a 的立方根用符号"$\sqrt[3]{a}$"表示,读作"三次根号a",其中 a 是被开方数,3是根指数.例如,$5^3=125$,5就是125的立方根,用式子表示就是 $\sqrt[3]{125}=5$.注意 $\sqrt[3]{125}$ 的根指数3不能省略,否则它表示的就是125的平方根.

求一个数的立方根的运算,叫做**开立方**.正如开平方与平方互为逆运算一样,开立方与立方也互为逆运算.

想一想：一个正数有两个平方根，那么一个正数有几个立方根？任何负数没有平方根，那么任何负数有没有立方根？

例 1 求下列各数的立方根：

(1) -8；　(2) 8；　(3) $-\frac{8}{27}$；

(4) 0.216；　(5) 0.

解：(1) ∵ $(-2)^3=-8$，

∴ -8 的立方根是 -2，即

$$\sqrt[3]{-8}=-2;$$

(2) ∵ $2^3=8$，

∴ 8 的立方根是 2，即

$$\sqrt[3]{8}=2;$$

(3) ∵ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{8}{27}$，

∴ $-\frac{8}{27}$ 的立方根是 $-\frac{2}{3}$，即

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=-\frac{2}{3};$$

(4) ∵ $0.6^3=0.216$，

∴ 0.216 的立方根是 0.6，即

$$\sqrt[3]{0.216}=0.6;$$

(5) ∵ $0^3=0$，

∴ 0 的立方根是 0，即

$$\sqrt[3]{0}=0.$$

从例 1 可以看出，正数 8 与 0.216 分别有一个正的立方根 2 与 0.6；负数 -8 与 $-\frac{8}{27}$ 分别有一个负的立方根 -2 与 $-\frac{2}{3}$；0 有立方根 0.

一般地，正数有一个正的立方根；负数有一个负的立方根；0 的立方根仍旧是 0.

从例 1 还可以看出，

$$\because \quad \sqrt[3]{-8}=-2,$$

$$\sqrt[3]{8}=2;$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}.$$

一般地，如果 $a>0$，那么，

$$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}.$$

这就是说，求负数的立方根，可以先求出这个负数的绝对值的立方根，然后再取它的相反数.

例 2 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{27}$；　　(2) $\sqrt[3]{-27}$；

(3) $-\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$；　　(4) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$.

解：(1) $\sqrt[3]{27}=3$；

(2) $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$；

(3) $-\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$；

(4) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$.

练 习

1. (1) 写出 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数的立方;

(2) 利用第 (1) 小题的结果,求下列各数的立方根:

$$27,\quad -64,\quad 343,\quad -729.$$

2. 求下列各数的立方根:

$$1,\ 512,\ \frac{8}{27},\ -\frac{27}{64},$$

$$\frac{1}{8},\ -\frac{1}{8},\ 0.512,\ -15\frac{5}{8}.$$

3. 求下列各式的值:

$$\sqrt[3]{1000},\quad -\sqrt[3]{0.001},\quad \sqrt[3]{-\frac{64}{125}},$$

$$-\sqrt[3]{-216},\ \sqrt[3]{-1},\ \sqrt[3]{3\frac{3}{8}},$$

$$-\sqrt[3]{-\frac{125}{216}},\quad \sqrt[3]{4+\frac{17}{27}}.$$

4. 填写下表:

a	0.000 001	0.001	1	1 000	1 000 000
$\sqrt[3]{a}$					

观察上表并且说明当已知数 a 的小数点向右 (或向左) 每移动三位,它的立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的小数点的移动规律是怎样的?

习 题 10.4

A 组

1. 下列各语句对不对？为什么？

(1) -0.064 的立方根是 0.4；(2) 8 的立方根是 ± 2；

(3) $\frac{1}{27}$ 的立方根是 $\frac{1}{3}$；(4) $\frac{1}{16}$ 的平方根是 $\frac{1}{4}$.

2. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{0.027}$；(2) $\sqrt[3]{-343}$；

(3) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$；(4) $\sqrt[3]{1+\frac{61}{64}}$；

(5) $\sqrt[3]{1-\frac{19}{27}}$；(6) $-\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}$；

(7) $\sqrt[3]{-0.729}$；(8) $\sqrt[3]{\frac{37}{64}-1}$.

3. 求下列各式中的 x：

(1) $x^3=0.008$；(2) $64x^3+125=0$；

(3) $x^3-3=\frac{3}{8}$；(4) $(x-1)^3=8$.

B 组

1. 计算：

$\sqrt{10^2}$，$\sqrt{10^4}$，$\sqrt{10^6}$，$\sqrt[3]{10^6}$，$\sqrt[3]{10^9}$，$\sqrt[3]{10^{12}}$.

你能从中找出计算的规律吗？如果将根号内的 10 换成 5，这种计算的规律是否仍然保持？

n 次方根和 n 次算术根

读一读

这一章里，我们研究了数的平方根和立方根. 实际上，数的方根的概念可以推广. 一般地，如果一个数的 n 次方 (n 是大于 1 的整数)等于 a，这个数就叫做 a 的 **n 次方根**. 换句话说，如果 $x^n=a$，那么，x 叫做 a 的 n 次方根. 求 a 的 n 次方根的运算，叫做**把 a 开 n 次方**，a 叫做**被开方数**，n 叫做**根指数**.

例如，由于 $2^4=16$ 和 $(-2)^4=16$，我们把 2 或 -2 叫做 16 的 4 次方根，这个运算叫做把 16 开 4 次方，16 叫做被开方数，4 叫做根指数.

如果 $a^6=64$，$a=?$ 请你求一下.

一般地，正数的偶次方根有两个，它们互为相反数.

当 n 是偶数时，正数 a 的正的 n 次方根用符号“$\sqrt[n]{a}$”表示，负的 n 次方根用符号“$-\sqrt[n]{a}$”表示，也可以把两个方根合起来写作 $\pm\sqrt[n]{a}$. 例如 $\sqrt[4]{16}=2$，$-\sqrt[4]{16}=-2$，合起来写作 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$.

我们已经知道，任何数都有一个立方根. 下面来进一步看一看：32 的 5 次方根是多少？-128 的 7 次方根呢？

因为 $2^5=32$,所以 2 是 32 的 5 次方根;

因为 $(-2)^7=-128$,所以 -2 是 -128 的 7 次方根.

一般地,正数的奇次方根是一个正数,负数的奇次方根是一个负数.

当 n 是奇数时,a 的 n 次方根用符号"$\sqrt[n]{a}$"表示.

例如: $\sqrt[5]{32}=2$, $\sqrt[7]{-128}=-2$.

我们还看到,

$$-\sqrt[7]{128}=-2,\quad \sqrt[7]{-128}=-2,$$

$$\therefore \sqrt[7]{-128}=-\sqrt[7]{128}.$$

一般地,如果 $a>0$,n 是正的奇数,那么,

$$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}.$$

0 的 n 次方根是 0,0 的 n 次方根记作 $\sqrt[n]{0}$,即有 $\sqrt[n]{0}=0$.

正数 a 的正的 n 次方根叫做 a 的 n **次算术根**.零的 n 次方根也叫做零的 n 次算术根.

求一个数的方根的运算,叫做**开方**.很明显,开 n 次方与 n 次方互为逆运算.

练 习

1. 填空:

(1) -32 的 5 次方根是___;

(2) 0 的 6 次方根是____.

2. 求下列各数的 4 次方根和 4 次算术根:

(1) 0.0016; (2) 0; (3) 10000; (4) 10^{-4}.

10.5 立方根表

会查立方根表求一个数的立方根.

与求一个数的平方根类似，通过立方运算只能得到一些特殊的数的立方根，因此本节和下一节分别介绍查表和用计算器求数的立方根的方法.

《中学数学用表》中的立方根表与平方根表类似，不同的只是立方根表没有修正值，所以只能直接查出0.100到99.9之间有三个数位的数的立方根. 如果被开方数有三个以上的数位，可以先将它四舍五入成有三个数位的数，再查表.

例1 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{3.78}$; (2) $\sqrt[3]{0.854}$;

(3) $\sqrt[3]{63.54}$; (4) $\sqrt[3]{15.857}$.

解: (1) $\sqrt[3]{3.78}=1.558$;

(2) $\sqrt[3]{0.854}=0.9488$;

(3) $\sqrt[3]{63.54}\approx\sqrt[3]{63.5}=3.990$;

(4) $\sqrt[3]{15.857}\approx\sqrt[3]{15.9}=2.515$.

如果要查小于0.1或大于100的数的立方根，需要先移动被开方数的小数点. 移动的法则是把被开方数的小数点向右或者向左三位三位地移，使它成为表内可以查到的数，被开方数的小数点每移动三位，查得的立方根的小数点向相反方向移动一位.

例 2 查表求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{0.005\,25}$；　　(2) $\sqrt[3]{525\,000}$.

解：(1) $\sqrt[3]{0.005\,25} = 0.173\,8$

小数点向右移三位　　小数点向左移一位

$\sqrt[3]{5.25}$ 查表 1.738

$\therefore \quad \sqrt[3]{0.005\,25} = 0.173\,8$;

(2) $\sqrt[3]{525\,000} = 80.67$

小数点向左移六位　　小数点向右移二位

$\sqrt[3]{0.525\,000}$ 查表 0.8067

$\therefore \quad \sqrt[3]{525.000} = 80.67$.

练　习

1. 查表求下列各数的立方根：

(1) 3；　(2) 8.7；　(3) 98.7；　(4) 0.35；

(5) $65\frac{4}{5}$；　(6) 1.847；　(7) 25.738；　(8) $8\frac{1}{8}$；

(9) -80；　(10) -16.5.

2. 查表求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{5}$；(2) $\sqrt[3]{68.8}$；(3) $\sqrt[3]{0.8725}$；(4) $\sqrt[3]{-43.6}$；

(5) $-\sqrt[3]{0.459}$；(6) $\sqrt[3]{0.000\,94}$；(7) $\sqrt[3]{0.037}$；

(8) $\sqrt[3]{6\,570}$；(9) $\sqrt[3]{420\,000}$；(10) $\sqrt[3]{0.000\,050\,87}$；

(11) $\sqrt[3]{-258}$；(12) $-\sqrt[3]{0.006\,254\,8}$.

习 题 10.5

A 组

1. 查表求下列各数的立方根:

(1) 0.39; (2) 48.3; (3) −2.36;

(4) −34.26; (5) 434.5; (6) 4 936;

(7) −0.053 2; (8) 0.007 283.

2. 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{0.432}$; (2) $\sqrt[3]{-1.948}$;

(3) $-\sqrt[3]{7\,456.3}$; (4) $\sqrt[3]{67.5}$;

(5) $\sqrt[3]{400\,000}$; (6) $\sqrt[3]{-8\frac{5}{9}}$;

(7) $\sqrt[3]{0.000\,051\,8}$; (8) $-\sqrt[3]{-350\frac{4}{25}}$.

3. 求下列各式中的 x:

(1) $x^3=27$; (2) $8x^3-1=0$;

(3) $x^3+6.4=0$ (精确到 0.01);

(4) $4x^3-5=0$ (精确到 0.01).

4. 已知正方体的体积是 71cm³, 求它的棱长 (结果保留两个有效数字).

10.6 用计算器求数的立方根

会用计算器求数的立方根.

前面我们已学习用计算器求数的平方根. 下面我们再用计算器来求数的立方根.

例 1 用计算器求 $\sqrt[3]{125}$.

解:

按　　键	显　　示
1 2 5	125.
■	2F
$\sqrt[y]{}$	125.
3	3.
=	5.

∴ $\sqrt[3]{125}=5.$

将上面求解过程与第 10.3 节例 8 比较,所不同的只是将其中的第 4 个步骤从按键 2 换成按键 3 .

例 2 用计算器求 $\sqrt[3]{1845}$.

解:

按　　键	显　　示
1 8 4 5	1845.
■	2F
$\sqrt{y}$	1845.
3	3.
=	12.26494082

∴ $\sqrt[3]{1845}\approx 12.26.$

一般地，用计算器求一个正数的 n 次方根，都可采用上面的计算程序．求一个负数的奇次方根，可以先求它的相反数的同次方根，然后在所得结果前面加上负号．

例 3　用计算器求 $\sqrt[5]{5}$ ．

解：

按　　键	显　　示
5	5.
2nd F	2F
$\sqrt[y]{}$	5.
5	5.
=	1.379729662

$\therefore$　　$\sqrt[5]{5} \approx 1.380.$

练　习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{2}$ ；　　(2) $\sqrt[3]{3}$ ；

(3) $\sqrt[3]{98}$ ；　　(4) $\sqrt[3]{48.1}$ ；

(5) $\sqrt[3]{1\,456}$ ；　　(6) $\sqrt[3]{28.36}$ ；

(7) $-\sqrt[3]{0.845\,21}$ ；　　(8) $\sqrt[3]{-56\,771}$ ．

2. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt[4]{2}$ ；　　(2) $\sqrt[5]{10}$ ；

(3) $\sqrt[6]{3}$ ；　　(4) $\sqrt[4]{183}$ ；

(5) $\sqrt[4]{2\,534}$ ；　　(6) $\sqrt[5]{-15\,372}$ ．

习 题 10.6

A 组

1. 用计算器求下列各数的立方根:
   (1) 48.3; (2) 434.5;
   (3) 4 936; (4) 0.007 283.
2. 用计算器求下列各式的值:
   (1) $\sqrt[3]{0.432}$; (2) $\sqrt[3]{-1.948}$;
   (3) $-\sqrt[3]{7\,456.3}$; (4) $\sqrt[3]{67.5}$;
   (5) $\sqrt[3]{400\,000}$; (6) $\sqrt[3]{0.845\,21}$;
   (7) $\sqrt[3]{\frac{22}{7}}$; (8) $\sqrt{-8\frac{5}{9}}$.
3. 求下列各式中的 x (精确到 0.01):
   (1) $x^3+10=0$; (2) $4x^3-15=0$.
4. 一个圆柱的体积是 $10m^3$, 且底面圆的直径与圆柱的高相等, 求这个圆柱的底面圆半径 (π 取 3.14, 结果保留 2 个有效数字).
5. 求下列各式的值:
   (1) $\sqrt[4]{1\,493}$; (2) $\sqrt[4]{0,0387}$;
   (3) $\sqrt[5]{1\,000}$; (4) $\sqrt[5]{-36.481}$;
   (5) $\sqrt[6]{0.135\,487}$; (6) $\sqrt[7]{10}$.

B 组

1. 通过计算器的计算比较下面各组数的大小:
   (1) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$; (2) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[2]{3}$;
   (3) $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{3}$; (4) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$.

10.7 实数

1. 了解无理数和实数的意义.
2. 了解有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

我们已经知道，有理数包括整数和分数，任何一个有理数都可以写成有限小数（整数可以看作小数点后面是0的小数）或者循环小数的形式. 例如：

$$3=3.0,$$

$$-\frac{3}{5}=-0.6,$$

$$\frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}.$$

反过来，任何有限小数或循环小数也都是有理数.

是不是所有的数都可以写成有限小数或循环小数的形式呢？不是的. 例如：

$$\sqrt{2}=1.414\,213\,56\cdots,$$

$$\sqrt{3}=1.732\,050\,80\cdots,$$

$$-\sqrt{7}=-2.645\,751\,31\cdots,$$

$$\sqrt[3]{2}=1.259\,921\,0\cdots,$$

$$\pi=3.141\,592\,65\cdots,$$

这些数的小数位数是无限的，而且是不循环的. 这样的小数叫做无限不循环小数，又叫做**无理数**.

注意 用根号形式表示的数并不都是无理数，例如$\sqrt{4}$，$-\sqrt[3]{27}$就不是无理数.

无理数可分为正无理数和负无理数. 例如$\sqrt{2}$，$\sqrt[5]{3}$，π，…是正无理数；$-\sqrt{2}$，$-\sqrt[5]{3}$，$-\pi$，…是负无理数.

有理数和无理数统称实数. 这样，我们学过的数可以列成下表：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\0\\\text{负有理数}\end{cases}\Big\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\Big\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

由于有理数和无理数都有正负之分，实数也有正负之分，所以实数还可以按大小分类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\0\\\text{负实数}\end{cases}$$

如果a表示一个正实数，$-a$就表示一个负实数. a与$-a$互为相反数. 另外规定：0的相反数仍是0.

实数的绝对值意义也和有理数一样：**一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；0的绝对值是0.** 例如，$|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$，$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$，$|\pi|=\pi$，$|-\pi|=\pi$，$|0|=0$等.

我们已经知道，每个有理数都可以用数轴上的点来表示.但是，数轴上的点并不都表示有理数，每个无理数也都可以用数轴上的点来表示. 我们可以运用几何作图的办法，在数轴上表示某些无理数.如图 10－2 所示，以数轴的单位长线段为边作一个正方形，那么根据勾股定理，以数轴的原点为圆心、正方形对角线为半径画弧，与数轴正半轴的交点就表示数 $\sqrt{2}$.

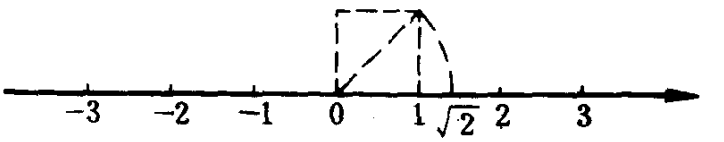


图 10－2

在把数从有理数扩充到实数以后，实数和数轴上的点就是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示，反过来，数轴上的每一个点都可以用一个实数来表示.

例 1 （1）求 $\sqrt[3]{-64}$ 的绝对值；

（2）已知一个数的绝对值是 $\sqrt{3}$ ，求这个数.

解：（1）∵ $\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4$，

∴ $|\sqrt[3]{-64}|=4$；

（2）∵ $|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，

$|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，

∴ 绝对值为 $\sqrt{3}$ 的数是 $\pm\sqrt{3}$.

关于有理数的运算律和运算性质，在进行实数运算时仍然成立. 在实数范围内，不仅可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且正数和零总可以进行开平方和开立方运算，负数只能进行开立方运算. 应该注意，负数不能开平方.

在实数运算中，当遇到无理数、并且需要求出结果的近似值时，可以按照所要求的精确度用相应的近似有限小数去代替无理数，再进行计算.

例 2 计算:

(1) $\sqrt{5}+\pi$ (精确到 0.01);

(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$ (结果保留三个有效数字).

解: (1) $\sqrt{5}+\pi\approx 2.236+3.142\approx 5.38$;

(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\approx 1.732\times 1.414\approx 2.45$.

例 3 比较下列各组数里两个数的大小.

(1) $\sqrt{3}$, 1.7; (2) $-\sqrt{6}$, $-\sqrt{7}$.

分析: 可以先求出无理数的近似值，再进行比较.

解: (1) $\because \sqrt{3}\approx 1.732$,

$\therefore \sqrt{3}>1.7$;

(2) $\because \sqrt{6}\approx 2.449$,

$\sqrt{7}\approx 2.646$,

$\therefore \sqrt{6}<\sqrt{7}$,

$\therefore -\sqrt{6}>-\sqrt{7}$.

练 习

1. (口答)什么叫做无理数?举出两个无理数的例子.

2. 判断下面的说法是否正确,如果不正确,举例说明.

(1) 无限小数都是无理数;

(2) 带根号的数都是无理数.

3. (口答)下列各数,哪些是有理数,哪些是无理数?

$-\pi$, -3.14, $-\sqrt{3}$, 1.732, 0, $0.\dot{3}$,

18, $\sqrt{\frac{25}{36}}$, $\frac{21}{31}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{16}$.

4. (1) 实数都是有理数吗?举例说明.

(2) 实数都是无理数吗?举例说明.

5. 求下列各数的相反数和绝对值:

2.5, $-\sqrt{7}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{3}-2$, 0.

6. 求下列各式中的实数 x:

(1) $|x|=\frac{2}{3}$; (2) $|x|=0$;

(3) $|x|=\sqrt{10}$; (4) $|x|=\pi$.

7. 计算:

(1) $\sqrt{10}+2.23-\pi$(精确到 0.01);

(2) $(-4)\times\sqrt{7}+2\sqrt{6}$ (结果保留三个有效数字).

8. 比较下列各组数里两个数的大小:

(1) $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$; (2) $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$.

习 题 10.7

A 组

1. 分别指出下列各数是有理数还是无理数:

$\frac{22}{7}$, 3.141 592 65, $\sqrt{8}$, -8, $\sqrt[3]{9}$,

0.6, $3\frac{1}{4}$, $\sqrt{36}$, 1.732, $\frac{\pi}{3}$.

2. 下列各语句对不对, 为什么?

(1) 所有的有理数都可以用数轴上的点表示出来,反过来,数轴上的所有点都表示有理数;

(2) 所有的实数都可以用数轴上的点表示出来, 反过来,数轴上的所有点都表示实数.

3. 求下列各数的绝对值:

$\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt{17}$, $\frac{\sqrt{2}}{-3}$, $\sqrt{3}-1.7$, $1.4-\sqrt{2}$.

4. 计算(精确到0.01):

(1) $\sqrt{5}-\sqrt{3}+0.145$;

(2) $\sqrt[3]{6}-\pi-\sqrt{2}$.

5. 比较下列各组里两个数的大小:

(1) -0.1, 0; (2) 4, $\sqrt{15}$;

(3) π, 3.1416; (4) $\sqrt{3}-2$, $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

6. 怎样运用作图的方法,在数轴上找出表示 $\sqrt{3}$ 的点?

B 组

1. 已知数0.101 001 000 100 001…,它的特点是两个1之间依次多一个0.这个数是有理数还是无理数?

2. 怎样运用作图的方法,在数轴上找出表示 $-\sqrt{5}$ 的点?

读一读

怎样用笔算开平方?

上面我们学习了查表和用计算器求平方根的方法. 或许有的同学会问:不用平方根表和计算器,可不可以求出一个数的平方根呢?

先一起来研究一下,怎样求 $\sqrt{1156}$. 这里 1156 是四位数,所以它的算术平方根的整数部分是两位数,且易观察出其中的十位数是 3. 于是问题的关键在于:怎样求出它的个位数 a? 为此,我们从 a 所满足的关系式来进行分析.

根据两数和的平方公式,可以得到

$$1156=(30+a)^2=30^2+2\times 30a+a^2,$$

所以

$$1156-30^2=2\times 30a+a^2,$$

即

$$256=(3\times 20+a)a,$$

这就是说,a 是这样一个正整数,它与 3×20 的和,再乘以它本身,等于 256.

为便于求得 a,可用下面的竖式来进行计算:

$$\begin{array}{r|l} & 3\ \ 4 \\ \hline & \sqrt{\ 11\ '56} \\ & 9 \\ \hline 20\times 3=60 & 2\ \ 56 \\ +)\qquad 4 & \\ \hline 64 & 2\ \ 56 \\ \hline & 0 \end{array}$$

根号上面的数3是平方根的十位数. 将256试除以20×3，得4. 由于4与20×3的和64，与4的积等于256，4就是所求的个位数 a. 竖式中的余数是0，表示开方正好开尽. 于是得到

$$1156=34^2,$$

或

$$\sqrt{1156}=34.$$

上述求平方根的方法，称为笔算开平方法；用这个方法可以求出任何正数的算术平方根，它的计算步骤如下：

1. 将被开方数的整数部分从个位起向左每隔两位划为一段，用撇号分开(竖式中的 11′56)，分成几段，表示所求平方根是几位数；

2. 根据左边第一段里的数，求得平方根的最高位上的数(竖式中的3)；

3. 从第一段的数减去最高位上数的平方，在它们的差的右边写上第二段数组成第一个余数(竖式中的256)；

4. 把求得的最高位数乘以20去试除第一个余数，所得的最大整数作为试商(3×20除256，所得的最大整数是4，即试商是4)；

5. 用商的最高位数的20倍加上这个试商再乘以试商. 如果所得的积小于或等于余数，试商就是平方根的第二位数；如果所得的积大于余数，就把试商减小再试(竖式中(20×3+4)×4=256，说明试商4就是平方根的第二位数)；

6. 用同样的方法，继续求平方根的其他各位上的数.

按照上面步骤求 $\sqrt{85\,264}$，可得到下面左边的竖式：

	2　9　2
	$\sqrt{8'52'64}$
	4
49	4　52
(20×2+9)	4　41
582	11　64
(20×29+2)	11　64
	0

	3.　5　3　5
	$\sqrt{12.50'00'00}$
	9
65	3　50
(20×3+5)	3　25
703	25　00
(20×35+3)	21　09
7065	3　91　00
(20×353+5)	3　53　25
	37　75

于是得到 $\sqrt{85\,264}=292.$

如遇开不尽的情况，可根据所要求的精确度求出它的近似值. 例如求 $\sqrt{12.5}$ 的近似值(精确到0.01)，可列出上面右边的竖式，并根据这个竖式得到

$$\sqrt{12.5}=3.54.$$

笔算开平方运算较繁，在实际中直接应用较少，但用这个方法可求出一个数的平方根的具有任意精确度的近似值.

我国古代数学的成就灿烂辉煌，早在公元前一世纪问世的我国经典数学著作《九章算术》里，就在世界数学史上第一次介绍了上述笔算开平方法. 据史料记载，国外直到公元五世纪才有对于开平方法的介绍. 这表明，古代对于开方的研究，我国在世界上是遥遥领先的.

小结与复习

一、内容提要

1. 本章主要内容是数的开方的有关概念，查表和用电子计算器求数的平方根、立方根的方法，以及实数的初步概念.

2. 如果一个数的平方(立方)等于 a，这个数就叫做 a 的平方根(立方根). 在解决问题时，经常要求一个数的平方根或立方根. 这一章介绍了两种平方根和立方根的求法，以供选用：有条件的学校可以用电子计算器直接来求，条件暂不具备的学校可通过查平方根表和立方根表来求.

3. 数的概念是在实践中不断发展的. 在小学里我们先学习了自然数和零；又学习了分数和小数(有限小数和循环小数)，就是说，学习了正有理数和零；到了初中一年级，又学习了负有理数. 这样，数的范围就扩充到了整个有理数. 现在我们又学习了无理数，把数的范围进一步扩充到整个实数. 这样，我们学过的数可以列成下表：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

数扩充到实数范围后，实数和数轴上的点是一一对应的，这将为我们解决很多问题提供方便.

4. 有理数的运算律和运算性质，在实数范围内是仍然成立的.

与乘法、除法互为逆运算一样，乘方与开方也互为逆运算.在实数范围内，正数和零总可以进行开平方运算，正数、零和负数总可以进行开立方运算.

加法、减法、乘法、除法、乘方与开方这六种运算，统称代数运算.

二、学习要求

1. 能说出什么是一个数的平方根、算术平方根、立方根，能用根号表示一个数的平方根、算术平方根和立方根，能用平方或立方运算求某些数的平方根或立方根.

2. 会查表求一个数的平方根和立方根；或会用计算器进行数的加、减、乘、除、乘方及开方运算.

3. 了解无理数的意义，知道实数分为有理数和无理数，会按要求对实数进行分类，了解实数的相反数和绝对值的意义，了解实数与数轴上的点具有一一对应关系，了解有理数的运算律和运算性质在实数范围内仍然成立.

三、需要注意的几个问题

1. 要注意数的平方根与算术平方根的区别. 任何正数 a 的平方根有两个,它们互为相反数,记作 $\pm\sqrt{a}$. 求一个正数的平方根时,不要漏掉其中的负平方根.

任何正数 a 的算术平方根只有一个,它就是指正数 a 的正的平方根, 记作 $\sqrt{a}$. 这表明,正数的算术平方根也是正数.

2. 要注意数的平方根与立方根的区别. 只有正数和零才有平方根, 且正数的平方根有两个; 任何实数 (包括负数)都有立方根, 且立方根只有一个.

3. 无理数是无限不循环小数. 一般来说,凡开方开不尽的数 (例如 $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ 等)都是无理数.但要注意, 并不是所有的无理数都可以写成根号的形式. 例如, 圆周率 π 就不能写成根号的形式.

4. 将数扩大到实数范围后, 正数和零总可以实施开平方运算, 但负数开平方没有意义.

复习题十

A 组

1. 填空:

(1) 已知 $x^2=a$, 那么 a 是 x 的_____, x 是 a 的_____;

(2) 已知 $y^3=b$, 那么 b 是 y 的_____, y 是 b 的_____.

2. 选择题. 下列说法中不正确的是(　　)

(A) -1 的立方是 -1.　　(B) -1 的立方根是 -1.

(C) -1 的平方是 1.　　(D) -1 的平方根是 -1.

3. 什么叫做算术平方根? 求出下列各数的平方根、算术平方根:

64,　36,　0.25,　5,　$(-3)^2$,

$\left(\frac{2}{5}\right)^2$,　$\left(-\frac{4}{13}\right)^2$.

4. 查表或用计算器求下列各式的值:

(1) $\sqrt{94.3}$;　　(2) $\sqrt{0.5374}$;

(3) $\sqrt{0.07321}$;　　(4) $\sqrt{8200}$;

(5) $\sqrt{527.48}$;　　(6) $\sqrt{4\frac{1}{4}}$;

(7) $\sqrt[3]{35.8}$;　　(8) $\sqrt[3]{0.43}$;

(9) $\sqrt[3]{278.4}$;　　(10) $\sqrt[3]{1.47}$;

(11) $\sqrt[3]{0.002008}$;　　(12) $\sqrt[3]{4107\frac{1}{2}}$;

(13) $\sqrt{0.00895}-\sqrt{0.0234}$;　(14) $\sqrt[3]{0.0695}+\sqrt[3]{0.1783}$.

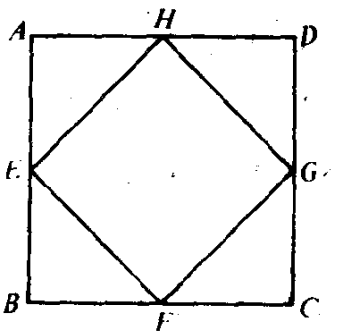
5. 求下列各式中的x:

(1) $x^2=169$;　　(2) $121x^2-25=0$;

(3) $9x^2=64$;　　(4) $x^2-1.69=0$;

(5) $x^3=64\,000$;　　(6) $x^3=-0.125$.

6. 如图,已知正方形 $ABCD$ 的面积是 64cm^2,E、F、G、H 分别是正方形四条边的中点,依次连结 E、F、G、H 得到一个正方形,求这个正方形的边长(用带根号的数的形式表示).



(第6题)

7. 已知一个正方体的棱长是 5 cm,再做一个正方体,使它的体积是原正方体的体积的 2 倍,求所做的正方体的棱长(精确到 0.1cm).

8. 要使人造地球卫星能绕地球运转,必须使它的速度大于第一宇宙速度而小于第二宇宙速度. 第一宇宙速度的计算公式是 $V_1=\sqrt{gR}$ (米/秒),第二宇宙速度的计算公式是 $V_2=\sqrt{2gR}$ (米/秒). 其中 $g=9.8$ (米/秒^2),$R=6.4\times10^6$ (米). 求第一、第二宇宙速度(结果保留两个有效数字).

9. 选择题: 下面说法中正确的是(　　)

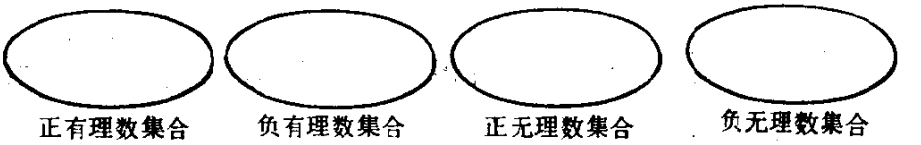
(A) 无理数包括正无理数、0 和负无理数.

(B) 无理数是用根号形式表示的数.

(C) 无理数是开方开不尽的数.

(D) 无理数是无限不循环小数.

10. 在下列每一个圈里，至少填入三个数：



（第10题）

11. 求下列各数的绝对值：

$$-2\sqrt{5},\quad \sqrt[3]{-7},\quad \sqrt{5}-\sqrt{7},\quad \frac{\pi}{2}-1.6.$$

12. 比较下列各组里两个实数的大小：

(1) 1.547, 1.5；　　(2) $-\sqrt{5}$，-2.24；

(3) $-\pi$, $-3.141\,592\,6$；　(4) $\sqrt{29}$，$5\frac{4}{13}$.

13. 计算（精确到0.01）：

(1) $\pi+\sqrt{10}-\frac{1}{3}+0.145$；

(2) $\sqrt{5}+\frac{1}{7}-\left(4.375-\frac{4}{3}\right)$.

B 组

1. 有没有最小的自然数？有没有最小的整数？有没有最小的有理数？有没有最小的无理数？有没有最小的实数？有没有绝对值最小的实数？

2. 已知 $a\geqslant 0$，求 $\sqrt{a^2}$.

3. 选择题：负数 a 和它的相反数的差的绝对值是(　　)

(A) $2a$.　　(B) 0.

(C) $-2a$.　　(D) $\pm 2a$.

4. 球的体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$（R 是球的半径）. 已知一个钢球的体积是 200cm^3，求它的半径（结果保留 3 个有效数字，π 取 3.14）.

5. (1) 计算 $\sqrt{10^2}$，$\sqrt{10^4}$，$\sqrt{10^6}$，$\sqrt{10^{2n}}$（n 是正整数）；
(2) 计算 $\sqrt{10^{-2}}$，$\sqrt{10^{-4}}$，$\sqrt{10^{-6}}$，$\sqrt{10^{-2n}}$（n 是正整数）；
(3) 计算 $\sqrt[3]{10^3}$，$\sqrt[3]{10^6}$，$\sqrt[3]{10^9}$，$\sqrt[3]{10^{3n}}$（n 是正整数）；
(4) 计算 $\sqrt[3]{10^{-3}}$，$\sqrt[3]{10^{-6}}$，$\sqrt[3]{10^{-9}}$，$\sqrt[3]{10^{-3n}}$（n 是正整数）.

6. (1) $\sqrt{2^2\times 3^2}$ 是否等于 2×3？
(2) a，b 都是正数，$\sqrt{a^2\cdot b^2}$ 是否等于 $a\cdot b$？

7. 用计算器求下列各式的值：
(1) $2\,893+1\,497$；　(2) $48\,547-28\,993$；
(3) 365×437；　(4) $0.755\div 0.002\,5$；
(5) $46.5+23.6-8.7$；　(6) $0.12\times 0.23\div 0.2$；
(7) $125\times 30+1\,000$；　(8) $144\div 4-250\times 0.3$；
(9) $10\times 9\times 8\times 7\times 6$；　(10) $0.140\,1^2$；
(11) 11.3^3；　(12) 11^5.

8. 用计算器求下列各式的值（保留四个有效数字）：
(1) $\sqrt{0.358\,7}$；　(2) $\sqrt[3]{-4\,839}$；
(3) $-\sqrt[4]{98.46}$；　(4) $\sqrt[5]{180.9}$.

自我测验十

（满分 100 分，时间 45 分）

1. (每小题 5 分，共 30 分)填空：

(1) 一个正数的正的平方根叫做这个数的_____；

(2) 任何正数的两个平方根的和等于_____；

(3) 可以实施开平方运算的数是_____；

(4) _____小数叫做无理数；

(5) 任何____数都有一个立方根；

(6) _____和数轴上的点一一对应.

2. (10 分)求下列各数的绝对值：

$\sqrt[3]{-16}$，$-\frac{\sqrt{3}}{5}$，$\frac{\sqrt[3]{-7}}{\sqrt[3]{-2}}$，$\sqrt{10}-3$，0.

3. (10 分)比较下列各组数里两个数的大小：

(1) 1.73 与 $\sqrt{3}$；　　(2) -3 与 $-\pi$.

查表或用计算器解下面各题：

4. (20 分)求值：

(1) $\sqrt{3.49}$；　　(2) $\sqrt{0.123\,4}$；

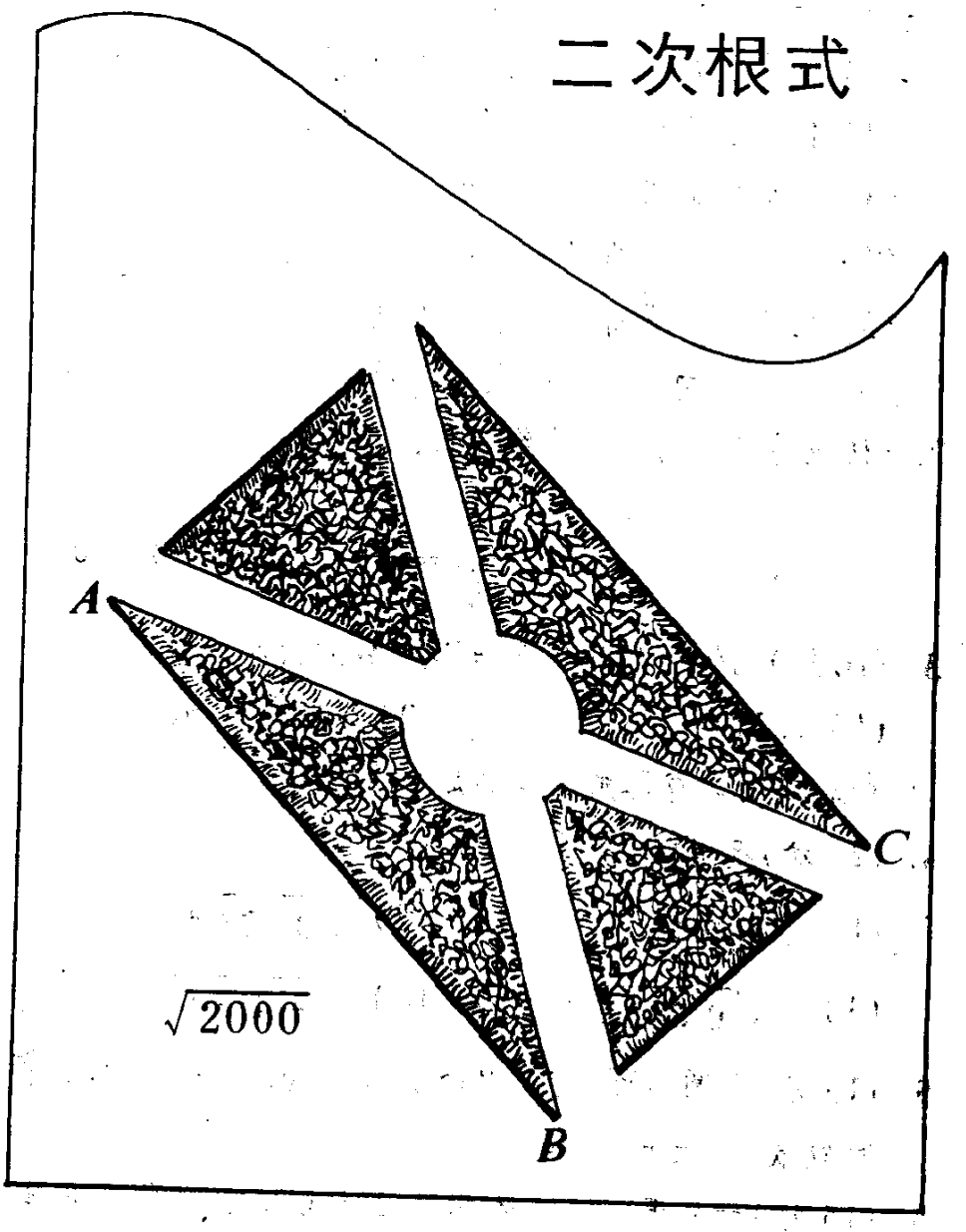
(3) $-\sqrt[3]{0.047\,1}$；　　(4) $\sqrt[3]{-418.9}$.

5. (15 分)半圆的面积为 785cm^2，求它的半径(结果保留 3 个有效数字，π 取 3.14).

6. (15 分)一个正方体的体积为 285cm^3，求这个正方体的表面积(结果保留 3 个有效数字).

第十一章

二次根式



我们在几何课上已经学习了勾股定理．如图是一块长方形绿地，如果绿地长 $AB=40\text{m}$，宽 $BC=20\text{m}$，那么，中间连接相对两角的小路 AC 长多少？

利用勾股定理，可得

$$\begin{aligned} AC&=\sqrt{AB^2+BC^2}\\ &=\sqrt{40^2+20^2}\\ &=\sqrt{1600+400}\\ &=\sqrt{2000}\ (\text{m}). \end{aligned}$$

$\sqrt{2000}$ 能不能进一步化简呢？如果我们知道 $\sqrt{5}\approx 2.236$，能不能既不查表也不使用计算器，求出 $\sqrt{2000}$ 的近似值呢？

再有，如果已知绿地的长 $AB=a\text{m}$，宽 $BC=\frac{a}{2}\text{m}$，又怎样求 AC 的长呢？

这些问题都将是本章的学习内容．

11.1 二次根式

知道二次根式的意义.

在前一章中,我们已经遇到过 $\sqrt{16}$,$\sqrt{0}$,$\sqrt{a}$ 这样的式子,知道符号"$\sqrt{\ }$"叫做**二次根号**,二次根号下的数叫做**被开方数**.因为在实数范围内,负数没有平方根,所以被开方数只能是正数或 0,也就是说,被开方数只能是非负数.一般地,式子 $\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$叫做**二次根式**.

例 1 x 是怎样的实数时,式子 $\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义?

解: 由 $x-3\geqslant 0$,得

$$x\geqslant 3.$$

当 $x\geqslant 3$ 时,式子 $\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义.

我们知道,正数 a 有两个互为相反数的平方根,正数 a 的正的平方根叫做 a 的算术平方根,记作 $\sqrt{a}$ .0 的平方根也叫做 0 的算术平方根,记作 $\sqrt{0}$.

这表明:

当 $a>0$ 时,$\sqrt{a}>0$;

当 $a=0$ 时,$\sqrt{a}=0$.

一般地,$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$是一个非负数.

$\sqrt{4}$ 是4的算术平方根，也就是说，$\sqrt{4}$ 是一个平方等于4的非负数.因此，有

$$(\sqrt{4})^2=4.$$

$\sqrt{2}$ 是2的算术平方根，同样有

$$(\sqrt{2})^2=2.$$

一般地，我们有

$$\boxed{(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0).}$$

例2 计算：

(1) $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$；　　(2) $(2\sqrt{3})^2$.

解：(1) $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=\frac{3}{5}$；

(2) $(2\sqrt{3})^2=2^2\times(\sqrt{3})^2=4\times 3=12.$

由 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$，可以得到

$$a=(\sqrt{a})^2\ (a\geqslant 0).$$

利用这个式子，可以把任何一个非负数写成一个数的平方的形式.例如，$3=(\sqrt{3})^2$，$0.5=(\sqrt{0.5})^2$ 等.

练　习

1. a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{a-5}$；　　(2) $\sqrt{a+3}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{0.3})^2$；　　(2) $(5\sqrt{7})^2$.

习 题 11.1

A 组

1. a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{5-a}$；　　(2) $\sqrt{7+a}$；

(3) $\sqrt{2a}$；　　(4) $\sqrt{2a-1}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{11})^2$；(2) $\sqrt{(-13)^2}$；(3) $-\sqrt{(2\times 3)^2}$；

(4) $(\sqrt{0.2})^2$；(5) $(8\sqrt{5})^2$；(6) $\left(-7\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2$.

3. 把下列非负数写成一个数的平方的形式：

(1) 9；(2) 6；(3) 2.5；(4) 0.25.

4. 判断下列各式是否成立：

(1) $\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}$；(2) $\sqrt{4\times 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$.

B 组

1. x 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{x^2+1}$；　　(2) $\sqrt{(x+1)^2}$；

(3) $\sqrt{\frac{1}{x}}$；　　(4) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2. 把下列各式写成平方差的形式，再分解因式：

(1) x^2-9；　　(2) a^2-3；

(3) $4a^2-7$；　　(4) $16b^2-11$.

11.2 二次根式的乘法

1. 会利用积的算术平方根的性质，化简二次根式.
2. 会进行简单的二次根式的乘法运算.

1. 积的算术平方根

我们看下面的例子：

$$\sqrt{4\times 9}=\sqrt{36}=6,$$

$$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times 3=6.$$

由此可以得到，

$$\sqrt{4\times 9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}.$$

一般地，有

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0).$$

这就是说：**积的算术平方根，等于积中各因式的算术平方根的积.**

注意，a, b 必须都是非负数，上式才能成立. 在本章中，如果没有特别说明，所有字母都表示正数.

例 1 化简：

(1) $\sqrt{16\times 81}$；　　(2) $\sqrt{2\,000}$.

解：(1) $\sqrt{16\times 81}=\sqrt{16}\times\sqrt{81}=4\times 9=36$;

(2) $\sqrt{2\,000}=\sqrt{10^2\times 2^2\times 5}$

$=\sqrt{10^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{5}$

$=10\times 2\times\sqrt{5}=20\sqrt{5}$.

注意 从上例可以看出，如果一个二次根式的被开方数中有的因式（或因数）能开得尽方，可以利用积的算术平方根的性质，将这些因式（或因数）开出来，从而将二次根式化简.

在例 1 中，我们根据算术平方根的定义，得出了 $\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{10^2}=10$ 等结果. 一般地，有

$$\sqrt{a^2}=a\ (a\geqslant 0).$$

例 2 化简：

(1) $\sqrt{4a^2b^3}$；　　(2) $\sqrt{x^4+x^2y^2}$.

解：(1) $\sqrt{4a^2b^3}=\sqrt{2^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot b}$

$=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{b}=2ab\sqrt{b}$；

(2) $\sqrt{x^4+x^2y^2}=\sqrt{x^2(x^2+y^2)}$

$=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=x\sqrt{x^2+y^2}$.

例 3 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=10\text{cm}$，$BC=24\text{cm}$.

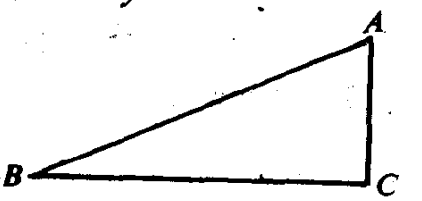


图　11-1

求：AB.

解：∵ $AB^2=AC^2+BC^2$，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$

$=\sqrt{10^2+24^2}=\sqrt{676}$

$=\sqrt{2^2\times 13^2}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{13^2}$

$=2\times 13=26\ (\text{cm})$.

答：AB 长 26cm.

练　习

1. 化简：

(1) $\sqrt{49\times121}$；　　(2) $\sqrt{225}$；

(3) $\sqrt{18}$；　　(4) $\sqrt{27\times15}$；

(5) $\sqrt{4y}$；　　(6) $\sqrt{3x^3}$；

(7) $\sqrt{8m^2n^2}$；　　(8) $\sqrt{16ab^2c^3}$.

2. 已知一个直角三角形的斜边 $c=21$，一条直角边 $b=4$. 求另一条直角边 a.

2. 二次根式的乘法

把 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,(a\geqslant0,b\geqslant0)$ 反过来，得

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,b\geqslant0).$$

运用这个式子，可以进行二次根式的乘法运算.

例 4　计算：

(1) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{7}$；　　(2) $3\sqrt{5}\cdot2\sqrt{10}$.

解：(1) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{14\times7}$

$=\sqrt{7^2\times2}=7\sqrt{2}$；

(2) $3\sqrt{5}\cdot2\sqrt{10}=3\times2\sqrt{5\times10}$

$=3\times2\times5\sqrt{2}=30\sqrt{2}$.

注意　二次根式运算的结果，应该尽量化简，如例 4(2)，结果不要写成 $6\sqrt{50}$，而应化简成 $30\sqrt{2}$.

例5 计算:

(1) $3\sqrt{5a}\cdot 2\sqrt{10b}$; (2) $\sqrt{10x}\cdot\sqrt{10^{-1}xy}$.

解: (1) $3\sqrt{5a}\cdot 2\sqrt{10b}=6\sqrt{5a\cdot 10b}$

$=6\sqrt{5^2\cdot 2ab}=6\times 5\sqrt{2ab}$

$=30\sqrt{2ab}$;

(2) $\sqrt{10x}\cdot\sqrt{10^{-1}xy}=\sqrt{10x\cdot 10^{-1}xy}$

$=\sqrt{10\cdot 10^{-1}x^2y}=\sqrt{x^2y}$

$=x\sqrt{y}$.

例6 一个长方形的长$a=\sqrt{6}$ cm,宽$b=\sqrt{3}$ cm.求这个长方形的面积.

解: $S=ab=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{18}$

$=3\sqrt{2}$ (cm^2).

答:这个长方形的面积是$3\sqrt{2}$ cm^2.

练 习

1. 计算:

(1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$; (2) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$;

(3) $6\sqrt{27}\cdot(-2\sqrt{3})$; (4) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{112}$;

(5) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{15x}$; (6) $2\sqrt{a}\cdot\sqrt{3ab}$;

(7) $\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$; (8) $2\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}$.

2. 一个直角三角形的两条直角边分别长$2\sqrt{2}$ cm与$\sqrt{10}$ cm.求这个直角三角形的面积.

习 题 11.2

A 组

1. 把下列各数分解因数:

(1) 28; (2) 40; (3) 72;

(4) 216; (5) 300; (6) 450.

2. 化简:

(1) $\sqrt{4\times 49}$; (2) $\sqrt{36\times 256}$; (3) $\sqrt{72}$;

(4) $\sqrt{300}$; (5) $\sqrt{36x^2}$; (6) $\sqrt{a^2(b+c)^2}$.

3. 化简:

(1) $\sqrt{5^6\times 3}$; (2) $\sqrt{3^2\times 4^3\times 5}$;

(3) $\sqrt{3^2+4^2}$; (4) $\sqrt{13^2-12^2}$;

(5) $\sqrt{12x^3}$; (6) $\sqrt{ab^2(c+1)^2}$.

4. 设直角三角形的两条直角边分别是 a, b, 斜边是 c:

(1) 如果 $a=6$, $b=9$, 求 c;

(2) 如果 $a=4$, $c=12$, 求 b;

(3) 如果 $c=15$, $b=10$, 求 a.

5. 设正方形的边长是 a, 面积是 S:

(1) 如果 $S=50\text{cm}^2$, 求 a;

(2) 如果 $S=242\text{cm}^2$, 求 a.

6. 计算:

(1) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{42}$; (2) $5\sqrt{12}\times 3\sqrt{18}$;

(3) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}$; (4) $-6\sqrt{45}\times(-4\sqrt{48})$;

(5) $\frac{1}{4}\sqrt{12a}\cdot 3\sqrt{3a}$; (6) $2\sqrt{xy}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{x}}$.

7. 设长方形的长是 a，宽是 b，面积是 S：

(1) 如果 $a=\sqrt{8}$，$b=\sqrt{12}$，求 S；

(2) 如果 $a=2\sqrt{50}$，$b=3\sqrt{32}$，求 S.

8. 求下列代数式的值：

(1) $\sqrt{a^2+b^2}$，其中 $a=2\sqrt{3}$，$b=3\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{(a+b)(a-b)}$，其中 $a=3\sqrt{21}$，$b=-\sqrt{18}$.

9. 判断下列各式是否成立：

(1) $\sqrt{25-16}=\sqrt{25}-\sqrt{16}$；　(2) $\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}$.

B 组

1. 仿照 $2\sqrt{0.5}=\sqrt{2^2}\sqrt{0.5}=\sqrt{2^2\times 0.5}=\sqrt{2}$ 的做法，化简下列各式：

(1) $10\sqrt{0.1}$；　(2) $5\sqrt{\frac{1}{5}}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{4.5}$；　(2) $\sqrt{0.4}\times\sqrt{3.6}$；

(3) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}$；　(4) $5\sqrt{45}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8})$；　(2) $(\sqrt{12}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}$.

想一想

用长 3cm，宽 2.5cm 的邮票 30 枚摆成一个正方形. 这个正方形的边长是多少？你可以用几种不同方法求解？

比较二次根式的大小

读一读

我们知道，两个正数里，较大的正数的平方也较大. 它们的算术平方根呢？看下面的例子：

$\sqrt{25}=5, \sqrt{16}=4,$

$25>16,$

$\sqrt{25}>\sqrt{16}$.

一般地，当 $a>0$, $b>0$ 时：

如果 $a>b$，那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

例如，$\sqrt{6}>\sqrt{5}$ ，$\sqrt{1.2}>\sqrt{1.1}$ ，等等.

例 比较 $3\sqrt{2}$ 与 $2\sqrt{3}$ 的大小.

解：$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{18}$ ，

$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times 3}=\sqrt{12}$.

$\because$ $18>12$,

$\therefore$ $\sqrt{18}>\sqrt{12}$ ，

$\therefore$ $3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$.

练 习

比较下列两数的大小：

(1) $\sqrt{2.8}$ 与 $\sqrt{2\frac{3}{4}}$ ；　(2) $7\sqrt{6}$ 与 $6\sqrt{7}$.

11.3 二次根式的除法

1. 会利用商的算术平方根的性质，化简二次根式.
2. 会进行简单的二次根式的除法运算.

1. 商的算术平方根

我们看下面的例子：

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}.$$

由此可以得到，

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}.$$

一般地，有

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0, b>0).$$

这就是说：**商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.**

例 1 化简：

(1) $\sqrt{1\frac{15}{49}}$；(2) $\sqrt{\frac{3}{100}}$；(3) $\sqrt{\frac{25x^4}{9y^2}}$.

解：(1) $\sqrt{1\frac{15}{49}}=\sqrt{\frac{64}{49}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$；

(2) $\sqrt{\frac{3}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{3}}{10}$；

(3) $\sqrt{\frac{25x^4}{9y^2}}=\frac{\sqrt{25x^4}}{\sqrt{9y^2}}=\frac{5x^2}{3y}$.

练　习

化简：

1. (1) $\sqrt{\frac{9}{64}}$；　(2) $\sqrt{4\frac{4}{9}}$；　(3) $\sqrt{\frac{4}{9x^2}}$.

2. (1) $\sqrt{\frac{36\times 9}{121}}$；(2) $\sqrt{\frac{0.04\times 144}{0.49\times 169}}$；(3) $\sqrt{\frac{16b^2c}{a^2}}$.

2. 二次根式的除法

把 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a\geqslant 0, b>0)$反过来，得

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0, b>0),$$

运用这个式子可以进行简单的二次根式的除法运算.

例2　计算：

(1) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$；　(2) $\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$.

解：(1) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{72}{6}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{1\frac{1}{2}\div\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times 6}=3.$

二次根式的除法运算，通常是采用化去分母中的根号的方法来进行的．例如，计算 $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$．先将 $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$ 写成 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，然后把分子、分母都乘以 $\sqrt{2}$，化去分母中的根号，就得

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

这样，就完成了除法运算．把分母中的根号化去，叫做**分母有理化**．

例 3 把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{-4\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$；　(2) $\dfrac{2a}{\sqrt{a+b}}$；

解：(1) $\dfrac{-4\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}=\dfrac{-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{-4\sqrt{14}}{21}$；

(2) $\dfrac{2a}{\sqrt{a+b}}=\dfrac{2a\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}=\dfrac{2a\sqrt{a+b}}{a+b}$．

练　习

1. 计算：

(1) $\dfrac{-\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$；　(2) $\sqrt{3\dfrac{1}{5}}\div\sqrt{1\dfrac{3}{5}}$．

2. 把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{40}}$；　(2) $\dfrac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{5}\,a}{\sqrt{10a}}$；　(4) $\dfrac{2y^2}{\sqrt{4xy}}$．

习 题 11.3

A 组

1. 化简:

(1) $\sqrt{\frac{9}{49}}$;　(2) $\sqrt{2\frac{34}{81}}$;

(3) $\sqrt{\frac{0.01\times 64}{0.36\times 324}}$;　(4) $\sqrt{\left(1\frac{1}{25}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$;

(5) $\sqrt{\frac{a^2b}{4c^2}}$;　(6) $\sqrt{\frac{x^2}{25y^4}}$.

2. 计算:

(1) $\frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}}$;　(2) $\frac{\sqrt{8.4}}{\sqrt{0.12}}$;

(3) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{5}{6}}$;　(4) $\frac{2\sqrt{x^2y}}{3\sqrt{xy}}$.

3. 把下列各式的分母有理化:

(1) $\frac{3}{\sqrt{6}}$;　(2) $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{12}}$;　(3) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}$;

(4) $\frac{-\sqrt{45}}{2\sqrt{20}}$;　(5) $\frac{4xy}{\sqrt{2x}}$;　(6) $\frac{a+2}{2\sqrt{a+1}}$.

4. 计算:

(1) $-\sqrt{17}\div\sqrt{85}$;　(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\div\sqrt{30}$;

(3) $\sqrt{18}\div(\sqrt{8}\cdot\sqrt{27})$;　(4) $\sqrt{12x}\div\frac{2}{5}\sqrt{y}$.

5. 已知 $a=2,b=3,c=5$,求下列各式的值:

(1) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{bc}}$;　(2) $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{c-a}}$;

(3) $\frac{\sqrt{a^2b}}{\sqrt{b^2c}}$;　(4) $\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{abc}}$.

6. 设长方形的面积是 S，相邻两边分别是 a，b：

(1) 如果 $S=16\text{cm}^2$，$a=\sqrt{6}$ cm，求 b；

(2) 如果 $S=24\text{m}^2$，$b=2\sqrt{2}$ m，求 a；

(3) 如果 $S=\sqrt{12}$ cm^2，$a=\sqrt{10}$ cm，求 b；

(4) 如果 $S=\sqrt{72}$ m^2，$b=\sqrt{50}$ m，求 a.

B 组

1. 化简：

(1) $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$；　　(2) $\dfrac{a^2-3}{a+\sqrt{3}}$.

2. 把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}(a<1)$；　　(2) $\dfrac{2(a+1)}{\sqrt{2a+4}}$.

3. 已知 $\sqrt{6}\approx 2.449$，求下列各式的值（精确到 0.01）：

(1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}$；　　(2) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{50}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$；　　(4) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}}$.

想一想

判断下列各式是否成立：

(1) $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$；

(2) $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$；

(3) $\sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$；

(4) $\sqrt{3\frac{2}{3}}=3\sqrt{\frac{2}{3}}$.

判断完成之后，你有什么体会？

11.4 最简二次根式

能把所给的二次根式化成最简二次根式.

看下面的问题:

如果已知$\sqrt{3}\approx1.732$,能不能求出$\sqrt{\frac{1}{3}}$与$\sqrt{27}$的近似值呢?

让我们先试着把$\sqrt{\frac{1}{3}}$与$\sqrt{27}$化简:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}.$$

这样,就可以利用$\sqrt{3}$求$\sqrt{\frac{1}{3}}$与$\sqrt{27}$的近似值了.

从上面的例子可以看出,遇到一个二次根式,将它化简会给解决问题带来方便.

满足下列两个条件的二次根式,叫做**最简二次根式**:

(1) 被开方数的因数是整数,因式是整式;

(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

例如,$\sqrt{\frac{1}{3}}$化成最简二次根式是$\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\sqrt{27}$化成最简二次根式是$3\sqrt{3}$.

注意 前两小节化简二次根式,就是要求化成最简二次根式.

例 1 把下列各式化成最简二次根式:

(1) $\sqrt{12}$; (2) $\sqrt{45a^2b}$.

解: (1) $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}$;

(2) $\sqrt{45a^2b}=\sqrt{3^2\times 5a^2b}=3a\sqrt{5b}$.

例 2 把下列各式化成最简二次根式:

(1) $4\sqrt{1\frac{1}{2}}$; (2) $x^2\sqrt{\frac{y}{x}}$.

解: (1) $4\sqrt{1\frac{1}{2}}=4\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

$=\frac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$;

(2) $x^2\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{x^2\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$

$=\frac{x^2\sqrt{xy}}{x}=x\sqrt{xy}$.

注意 (1) 化简时,往往需要把被开方数分解因数或分解因式.

(2) 当一个式子的分母中含有二次根式时,一般应把它化简成分母中不含二次根式的式子,也就是把它的分母有理化.

练 习

把下列各式化成最简二次根式:

(1) $\sqrt{32}$; (2) $2\sqrt{a^3b^3}$; (3) $\sqrt{1.5}$;

(4) $\sqrt{\frac{4}{3}}$; (5) $\sqrt{\frac{20a^2b}{c}}$; (6) $x^2\sqrt{\frac{1}{8x^3}}$.

习 题 11.4

A 组

1. 把下列各式化成最简二次根式:

(1) $6\sqrt{\frac{1}{8}}$; (2) $10\sqrt{1\frac{4}{5}}$; (3) $\sqrt{\frac{x}{y}}$;

(4) $\sqrt{(-8)^2-4\times(-4)}$; (5) $\sqrt{25m^3+50m^2}$;

(6) $\sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$; (7) $\sqrt{\frac{7(a-b)}{27(a+b)}}(a>b)$;

(8) $a\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}(a<b)$.

2. 求代数式 $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的值:

(1) $a=1, b=10, c=-15$;

(2) $a=2, b=-8, c=5$.

3. 已知 $\sqrt{2}\approx1.414$, 求 $\sqrt{0.5}$ 与 $\sqrt{8}$ 的近似值(结果保留三个有效数字).

B 组

1. 把下列各式化成最简二次根式:

(1) $\frac{2a^2}{3b}\sqrt{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^2}{a^4}}(b>1)$;

(2) $\frac{a}{a+2b}\sqrt{\frac{a^2b+4ab^2+4b^3}{a}}$.

2. 化简:

(1) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$; (2) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$.

二次根式应用举例

读一读

二次根式实际应用十分广泛，下面再介绍几个例子.

(1) 如果一个三角形的三边分别长 a，b，c，设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，那么可以根据下面的公式(秦九韶——海伦公式)求这个三角形的面积 S:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(2) 一个物体从高处自行落下，落到地面所用的时间 t(单位:秒)与开始落下时的高度 h(单位:米)有下面的关系:

$$t\approx\sqrt{\frac{h}{5}}.$$

(3) 一根细线，上端固定，下端系一个小重物，让这个重物来回自由摆动，来回摆动一次所用的时间 t(单位:秒)与细线的长度 l(单位:米)有下面的关系:

$$t\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}.$$

11.5 二次根式的加减法

1. 知道什么是同类二次根式.
2. 会进行二次根式的加减法运算.

看下面的两个例子.

(1) 计算 $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$.

根据分配律可以得出,

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}.$$

(2) 计算 $\sqrt{8}+\sqrt{18}$.

注意到 $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{18}$ 都不是最简二次根式,可以考虑先将两式分别化简.

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2},$$

$$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}.$$

接下来,就回到前一个例子了.

从上面的例子可以看出:

(1) 如果几个二次根式的被开方数相同,那么可以直接根据分配律进行加减运算;

(2) 如果所给的二次根式不是最简二次根式,应该先化简,再考虑进行加减运算.

几个二次根式化成最简二次根式以后,如果被开方数相同,这几个二次根式就叫做同类二次根式.

例如,$\sqrt{8}$,$\sqrt{18}$,$4\sqrt{2}$ 是同类二次根式.

例 1 下列各式中，哪些是同类二次根式？

$$\sqrt{2}, \sqrt{75}, \sqrt{\frac{1}{50}}, \sqrt{\frac{1}{27}}, \sqrt{3},$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{8ab^3}, 6b\sqrt{\frac{a}{2b}}.$$

解：$\because \sqrt{75}=\sqrt{5^2\times 3}=5\sqrt{3}$；

$$\sqrt{\frac{1}{50}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9};$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{8ab^3}=\frac{2}{3}\cdot 2b\sqrt{2ab}=\frac{4b\sqrt{2ab}}{3};$$

$$6b\sqrt{\frac{a}{2b}}=6b\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}\cdot\sqrt{2b}}=3\sqrt{2ab}.$$

$\therefore$ $\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{50}}$ 是同类二次根式；

$\sqrt{75}, \sqrt{\frac{1}{27}}, \sqrt{3}$ 是同类二次根式；

$\frac{2}{3}\sqrt{8ab^3}, 6b\sqrt{\frac{a}{2b}}$ 是同类二次根式。

二次根式相加减，先把各个二次根式化成最简二次根式，再把同类二次根式分别合并．合并同类二次根式与合并同类项类似，因此，二次根式的加减可以对比整式的加减进行．

例2 计算 $2\sqrt{12}-4\sqrt{\frac{1}{27}}+3\sqrt{48}$.

解: 原式 $=4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}+12\sqrt{3}$

$$=\left(4-\frac{4}{9}+12\right)\sqrt{3}$$

$$=\frac{140\sqrt{3}}{9}.$$

例3 计算 $\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$.

解: 原式 $=2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

例4 计算 $\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$.

解: 原式 $=\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{75}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}+5\sqrt{3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}+\left(5-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

注意 不是同类二次根式的二次根式(例如 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$)不能合并.

练　习

1. 下列各组里的二次根式是不是同类二次根式？

(1) $\sqrt{63}$，$\sqrt{28}$；　(2) $\sqrt{12}$，$\sqrt{27}$，$4\sqrt{\frac{1}{3}}$；

(3) $\sqrt{4x^3}$，$2\sqrt{2x}$；　(4) $\sqrt{18}$，$\sqrt{50}$，$2\sqrt{\frac{2}{9}}$；

(5) $\sqrt{2x}$，$\sqrt{2a^2x^3}$，$\sqrt{50xy^2}$.

2. 计算：

(1) $5\sqrt{2}+\sqrt{8}-7\sqrt{18}$；　(2) $\sqrt{28}+9\sqrt{112}$；

(3) $3\sqrt{40}-\sqrt{\frac{2}{5}}-2\sqrt{\frac{1}{10}}$；(4) $\sqrt{12}+\sqrt{\frac{1}{27}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$；

(5) $\frac{1}{3}\sqrt{32}+\frac{\sqrt{8}}{2}-\frac{1}{5}\sqrt{50}$；

(6) $\sqrt{2x}-\sqrt{8x^3}+2\sqrt{2xy^2}$；

(7) $x\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{4y}-\frac{\sqrt{x}}{2}+y\sqrt{\frac{1}{y}}$；

(8) $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(b^2>4ac)$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{18}-(\sqrt{98}-2\sqrt{75}+\sqrt{27})$;

(2) $(\sqrt{45}+\sqrt{27})+\left(\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{125}\right)$;

(3) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{6}\right)$;

(4) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\frac{3}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{27})$;

(5) $a^2\sqrt{8a}+3a\sqrt{50a^3}-\frac{a}{2}\sqrt{18a^3}$；

(6) $\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{2}{a}\sqrt{a^3b}\right)-\left(3a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{9ab}\right)$.

习 题 11.5

A 组

1. 下列二次根式中,哪些是同类二次根式?

$\sqrt{8}$,$\sqrt{20}$,$-\sqrt{\frac{5}{16}}$,$\sqrt{\frac{1}{18}}$,$3\sqrt{\frac{4}{5}}$,$-\sqrt{121a^3}$,

$a\sqrt{\frac{1}{a}}$,$2\sqrt{a^3b^3c}$,$3\sqrt{a^3bc^3}$,$4\sqrt{\frac{c}{ab}}$,

$\sqrt{\frac{1}{mn-np}}\ (m>p)$, $\sqrt{\frac{n^3}{m-p}}\ (m>p)$.

2. 下列计算是否正确? 为什么?

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$; (2) $2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$;

(3) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5.$

3. 计算:

(1) $3\sqrt{8}+2\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

(2) $9\sqrt{3}-7\sqrt{12}+5\sqrt{48}$;

(3) $6-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$; (4) $2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{6}}-\frac{1}{5}\sqrt{54}$;

(5) $\sqrt{\frac{1}{5}}+2\sqrt{20}-4\sqrt{\frac{4}{5}}-\frac{1}{5}\sqrt{5}$;

(6) $\sqrt{12}+3\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}\sqrt{48}$;

(7) $2a\sqrt{27a}+6a\sqrt{\frac{3a}{4}}$; (8) $\frac{1}{a}\sqrt{x^3}-\sqrt{\frac{1}{x}}$;

(9) $2a\sqrt{3ab^2}-\frac{b}{6}\sqrt{27a^3}+2ab\sqrt{\frac{3}{4}a}$;

(10) $5\sqrt{x^3y}-2y\sqrt{xy}-6\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}$.

4. 计算:

(1) $(\sqrt{32}-\sqrt{72})+(\sqrt{300}-2\sqrt{48})$;

(2) $(\sqrt{45}+\sqrt{18})-(\sqrt{8}-\sqrt{125})$;

(3) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-2\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{18}\right)$;

(4) $\left(6\sqrt{\frac{1}{6}}-\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)+\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{54}\right)$;

(5) $7\sqrt{a}-\left(a\sqrt{\frac{1}{a}}-4\sqrt{ab^2}\right)$;

(6) $\left(\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{y}{x}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$.

5. (1) 当 $x=7$ 时，求下列代数式的值:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x-1}\ ;$$

(2) 当 $x=4, y=16$ 时，求下列代数式的值:

$$\sqrt{x^3+x^2y+\frac{1}{4}xy^2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^2y+xy^2+y^3}.$$

6. 设三角形的三边分别是 a,b,c，周长是 C:

(1) 如果 $a=7\sqrt{50}$，$b=4\sqrt{72}$，$c=2\sqrt{98}$，求 C;

(2) 如果 $a=\sqrt{40}$ m，$c=\sqrt{160}$ m，$C=9\sqrt{10}$ m，求 b.

7. 已知 $\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，求下列各式的近似值(精确到 0.01):

(1) $\sqrt{2\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}\sqrt{54}$;

(2) $\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)-\left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}-\sqrt{45}\right)$.

B 组

1. 判断下列各式是否正确，如果不正确，举出一个反例来说明：

(1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$；

(2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}\ (a>b)$；

(3) $\sqrt{a^2-b^2}=a-b\ (a>b)$；

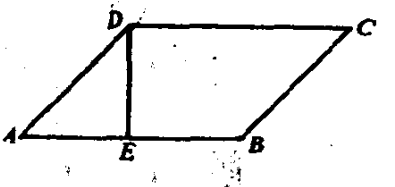
(4) $\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

2. 设直角三角形的两条直角边分别是 a, b，斜边是 c. 周长是 C：

(1) 如果 $a=\sqrt{50}$，$b=\sqrt{288}$，求 C；

(2) 如果 $a=\sqrt{45}$，$c=5\sqrt{45}$，求 C；

(3) 如果 $b=\sqrt{54}$，$c=\sqrt{150}$，求 C.



(第3题)

3. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$DE\perp AB$，E 在 AB 上，$DE=AE=EB=a$. 求 $\square ABCD$ 的周长 C.

4. 计算：

(1) $5\sqrt{6}\ (3\sqrt{12}+4\sqrt{18})$；

(2) $2\sqrt{5}\ (4\sqrt{20}-3\sqrt{45}+2\sqrt{5})$；

(3) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

解完后想一想，你的计算根据是什么？

11.6 二次根式的混合运算

1. 会进行二次根式的混合运算.
2. 能把分母中含有两个二次根式的式子进行分母有理化.

在学习简单的二次根式的乘除法之后，又学习了二次根式的加减法.在这个基础上,就可以进行混合运算的学习了. 注意,在实数范围内运算律仍然适用.

例 1 计算:

(1) $\left(\sqrt{\frac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}$;

(2) $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

解: (1) $\left(\sqrt{\frac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}$

$$=\sqrt{\frac{8}{27}}\cdot\sqrt{6}-5\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$$

$$=\sqrt{\frac{8}{27}\times 6}-5\sqrt{3\times 6}$$

$$=\frac{4}{3}-15\sqrt{2};$$

(2) $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

$$=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}$$

$$=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+10\sqrt{3}-6\sqrt{2}$$

$$=19\sqrt{2}.$$

二次根式的和相乘，与多项式的乘法相类似. 遇到适用多项式乘法公式的时候，也可以运用乘法公式.

例 2 计算:

(1) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$;

(2) $(4+3\sqrt{5})^2$;

(3) $(\sqrt{6}-3\sqrt{3})^2$.

解: (1) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2$

$=12-18$

$=-6$;

(2) $(4+3\sqrt{5})^2$

$=4^2+2\cdot 4\cdot 3\sqrt{5}+(3\sqrt{5})^2$

$=16+24\sqrt{5}+45$

$=61+24\sqrt{5}$;

(3) $(\sqrt{6}-3\sqrt{3})^2$

$=(\sqrt{6})^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2$

$=6-18\sqrt{2}+27$

$=33-18\sqrt{2}$.

注意 这里的第(1)小题运用了 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 这个公式，所得结果成为有理数了.

例3 计算:

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$;

(2) $(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by})(2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})$.

解: (1) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$

$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2$

$=3-6=-3$;

(2) $(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by})(2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})$

$=(2\sqrt{ax})^2-(5\sqrt{by})^2$

$=4ax-25by$.

两个含有二次根式的代数式相乘,如果它们的积不含有二次根式,我们说这两个代数式互为**有理化因式**. 例如,$\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$,$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}-\sqrt{6}$ 互为有理化因式.

练 习

1. 计算:

(1) $(\sqrt{12}-3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$; (2) $2\sqrt{5}(\sqrt{10}+4\sqrt{12})$;

(3) $(\sqrt{2}+2\sqrt{12}-\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{3}$;

(4) $3\sqrt{6}(3\sqrt{2}-\sqrt{15})$.

2. 计算:

(1) $(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{2}-3)$;

(2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$;

(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})$;

(4) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

3. 计算：

(1) $(4-3\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})$；

(2) $(7\sqrt{2}+2\sqrt{6})(2\sqrt{6}-7\sqrt{2})$；

(3) $(\sqrt{4x+3}-\sqrt{2x})(\sqrt{4x+3}+\sqrt{2x})$；

(4) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2$；

(5) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$；

(6) $(4\sqrt{7}-7\sqrt{3})^2$；

(7) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$；

(8) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$；

(9) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$；

(10) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

我们知道，化简一个式子时，如果分母是二次根式，采用分子、分母同乘以分母的有理化因式的方法.

例如，$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

如果分母是两个二次根式的和，例如 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$，应该怎样化简呢？由上一页的例 3，知道 $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 的有理化因式是 $\sqrt{3}-\sqrt{6}$. 将 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ 的分子、分母同乘以 $\sqrt{3}-\sqrt{6}$，可以使分母不含二次根式，从而将式子化简.

例4 把下列各式的分母有理化:

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$; (2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $(x\neq y)$;

(3) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

解: (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{9-3}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$;

(2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$;

(3) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

注意 (1) 一般地,$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ 与 $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$ 互为有理化因式.

(2) 在分母有理化时,有时也可以利用分解因式的方法,先约分.如例 4 的第 (3)小题.

观察例 4 的几个小题,可以看出,它们实际上都涉及了除法运算.有关二次根式的除法,通常是先写成分式的形式,然后通过分母有理化进行运算.例如

$$\sqrt{2}\div(3-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}.$$

然后,再将分母有理化,就可以了.

例 5 求下列各式的值 (精确到 0.01):

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; (2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

解: (1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$$=\frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

$$=2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

$$\approx 2(2.236+1.732)$$

$$\approx 7.94;$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\approx 0.707+0.577\approx 1.28.$$

练 习

1. 把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$；　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$；　(4) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}(a\neq b)$；

(5) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$；　(6) $\dfrac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$.

2. 计算：

(1) $\left(5\sqrt{15}+\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)\div\sqrt{5}$；

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4-3\sqrt{5}}$；

(3) $\dfrac{14+6\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$；

(4) $\left(\sqrt{mn}\mp\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right)\div\sqrt{\dfrac{m}{n}}$；

(5) $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}(a>b)$；

(6) $(x+2\sqrt{xy}+y)\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

3. 求下列各式的值（精确到 0.01）：

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$；　(2) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$；

(3) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$；　(4) $\dfrac{\sqrt{5}+6}{\sqrt{5}-6}+\dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}-2}$.

习 题 11.6

A 组

1. 计算:

(1) $(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\sqrt{3}$;

(2) $3\sqrt{2}\left(2\sqrt{12}-4\sqrt{\frac{1}{8}}+3\sqrt{48}\right)$;

(3) $\left(\sqrt{xy}-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\sqrt{xy}$;

(4) $(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab)\sqrt{ab}$.

2. 计算:

(1) $(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{6}+\sqrt{2})$;

(2) $(\sqrt{27}+\sqrt{28})(\sqrt{12}-\sqrt{63})$;

(3) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-5\sqrt{3})$;

(4) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

(5) $(\sqrt{x}+\sqrt{3})(2\sqrt{x}+3\sqrt{2})$;

(6) $(x+y+2\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

3. 计算:

(1) $(5\sqrt{3}+4\sqrt{2})(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})$;

(2) $(7\sqrt{5}+6\sqrt{7})(6\sqrt{7}-7\sqrt{5})$;

(3) $(3\sqrt{2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-4\sqrt{3})$;

(4) $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)(b^2-4ac>0)$;

(5) $(7\sqrt{3}+2\sqrt{7})^2$; (6) $(4-5\sqrt{3})^2$;

(7) $\left(3\sqrt{a}+2\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$; (8) $\left(3\sqrt{1\frac{2}{3}}-\sqrt{1\frac{4}{5}}\right)^2$.

4. 把下列各式的分母有理化:

(1) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;　　(2) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}$;

(3) $\frac{7n}{3\sqrt{n}}$;　　(4) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ $(x>1)$;

(5) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$;　　(6) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

(7) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{3}-\sqrt{15}}$;　　(8) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$;

(9) $\frac{2\sqrt{x+2}+3\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ $(x>2)$.

5. 计算:

(1) $\sqrt{\frac{1}{45}}\div\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$;　　(2) $\sqrt{20a}\div\frac{2}{3}\sqrt{b}$;

(3) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{24}$;　　(4) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$;

(5) $\left(\sqrt{48}+\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}}\right)\div\sqrt{27}$;

(6) $\left(\frac{3}{4}\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\div(\sqrt{5}-\sqrt{3})$;

(7) $(7\sqrt{2}+2\sqrt{6})\div(2\sqrt{6}-7\sqrt{2})$;

(8) $\sqrt{15}\div\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

6. 求下列各式的值(精确到 0.01):

(1) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$;　　(2) $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$;

(3) $\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}+1}$;　　(4) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;

(5) $\left(\frac{2}{x+1}\right)^2$，其中 $x=\sqrt{3}$；

(6) $\frac{a-4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$，其中 $a=6, b=5$.

7. (1) 已知 $x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$，求 x^2-x+1 的值；

(2) 已知 $x=2+\sqrt{3}$，求 $\frac{3x^2-2x+5}{2x-7}$ 的值.

8. 化简：

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{2}{\sqrt{3}+1}$；

(2) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{\sqrt{7}-5}{2}$；

(3) $\frac{1}{y}\sqrt{x-y}+\frac{x}{\sqrt{x-y}}-\frac{1}{x-y}\sqrt{(x-y)^3}\ (x>y)$；

(4) $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$.

B 组

1. 计算：

(1) $\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$；

(2) $\sqrt{3}\div(5-\sqrt{7})-(2\sqrt{3}-5\sqrt{7})^2$；

(3) $(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$+(3\sqrt{3}+5\sqrt{2})\div(3\sqrt{3}-5\sqrt{2})$；

(4) $\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-4\sqrt{3}+3\sqrt{5})$；

(5) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$;

(6) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2+(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2 (x>y)$.

2. 在以下各方程后面的括号内,分别给出了一组数,从中找出方程的解:

(1) $2x^2-6=0$; $(\sqrt{3}, \sqrt{6}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$

(2) $\frac{1}{2}x^2-2=44$; $(2\sqrt{21}, 2\sqrt{23}, -2\sqrt{21}, -2\sqrt{23})$

(3) $2(x+5)^2=24$;

$(5+2\sqrt{3}, 5-2\sqrt{3}, -5+2\sqrt{3}, -5-2\sqrt{3})$

(4) $(x-2)^2=4x$.

$(4+2\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3}, -4+2\sqrt{3}, -4-2\sqrt{3})$

3. 解下列方程:

(1) $\sqrt{x}=3$; (2) $\frac{\sqrt{x}}{2}=5$;

(3) $\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{1}{2}=3$; (4) $\frac{3\sqrt{x}}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$.

想一想

我们已经知道:如果 $x^2=4$,那么 $x=\pm 2$. 再看下面的问题:

(1) 如果 $(x+1)^2=4$,那么 $x=?$

(2) 如果 $(x+1)^2=3$,那么 $x=?$

11.7 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的化简

1. 掌握二次根式的性质：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a\ (a\geqslant 0), \\ -a\ (a<0). \end{cases}$$

2. 会利用上式化简二次根式.

前面对二次根式的性质与运算的研究，着重在根号内的字母取非负数的情形.实际上，我们已经遇到过根号内的字母取负数的问题.例如，当 $a=1, b=10, c=-15$ 时，求代数式 $\sqrt{b^2-4ac}$ 的值.

下面我们研究 a 为任意实数时，$\sqrt{a^2}$ 的化简.

我们已经知道，当 $a\geqslant 0$ 时，有

$$\sqrt{a^2}=a.$$

当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}$ 等于什么呢？

$\sqrt{(-2)^2}=2$，而 -2 与 2 互为相反数；

$\sqrt{(-3)^2}=3$，而 -3 与 3 互为相反数.

一般地，当 $a<0$ 时，

$$\sqrt{a^2}=-a.$$

我们还知道，

当 $a\geqslant 0$ 时，$|a|=a$；

当 $a<0$ 时，$|a|=-a$.

注意 当 $a=0$ 时，$|a|=0=a$.

综合上面的情况,有

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a\ (a\geqslant 0), \\ -a\ (a<0). \end{cases}$$

例 1 化简:

(1) $\sqrt{16x^2}\ (x>0)$; (2) $\sqrt{a^2b}\ (a<0)$.

解: (1) $\because\ x>0$,

$\therefore\ \sqrt{16x^2}=4|x|=4x$;

(2) $\because\ a<0$,

$\therefore\ \sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$.

例 2 化简 $\sqrt{(a-3)^2}\ (a<3)$.

解: $\because\ a<3$,

$\therefore\ a-3<0$.

$\therefore\ \sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=-(a-3)=3-a$.

例 3 化简 $\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-2x+x^2}}\ (x>1)$.

分析: 可以看出被开方数的分母是一个数的完全平方,从而可以根据上面的公式进行化简.

解: $\because\ x>1$,

$\therefore\ x>0, x-1>0$.

$$\therefore\ \sqrt{\frac{2x^2}{1-2x+x^2}}=\sqrt{\frac{2x^2}{(1-x)^2}}=\frac{\sqrt{2x^2}}{\sqrt{(1-x)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}|x|}{|1-x|}=\frac{\sqrt{2}\,x}{x-1}.$$

练　习

1. (口答)下列等式能不能成立？为什么？

(1) $\sqrt{7^2}=7$;　　(2) $\sqrt{(-7)^2}=-7$;

(3) $\sqrt{0^2}=0$;　　(4) $\sqrt{x^2}=x\ (x<0)$.

2. 说出下列各式的值：

(1) $\sqrt{(-0.9)^2}$;　　(2) $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$;

(3) $-\sqrt{(-\pi)^2}$;　　(4) $\sqrt{10^{-2}}$;

(5) $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$;　　(6) $\sqrt{\frac{1}{b^2}}\ (b<0)$.

3. 化简：

(1) $\sqrt{(5-9)^2}$;　　(2) $\sqrt{(3.5-2)^2}$;

(3) $\sqrt{(\pi-3)^2}$;　　(4) $\sqrt{(10^{-1}-10^{-2})^2}$;

(5) $\sqrt{(b-4)^2}\ (b>4)$;

(6) $\sqrt{(m-n)^2}\ (m<n)$;

(7) $\sqrt{\frac{a}{(a-b)^2}}\ (b>a)$;

(8) $\sqrt{x^2(x-1)^2}\ (x>1)$.

4. 甲乙两人计算 $a+\sqrt{1-2a+a^2}$ 的值，当 $a=5$ 的时候，得到不同的答案，甲的解答是

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1;$$

乙的解答是

$$\begin{aligned}a+\sqrt{1-2a+a^2}&=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+a-1\\&=2a-1=2\times 5-1=9.\end{aligned}$$

哪一个答案是正确的？错误的解答错在哪里？为什么？

习 题 11.7

A 组

1. 化简:

(1) $-\sqrt{(5\times 6)^2}$; (2) $\sqrt{a^6}$ $(a<0)$;

(3) $\sqrt{(x+5)^2}$ $(x<-5)$; (4) $\sqrt{x^2-2x+1}$ $(x\geqslant 1)$;

(5) $\sqrt{x^2-4x+4}$ $(x<2)$;

(6) $x+y+\sqrt{x^2-2xy+y^2}(x<y)$.

2. 化简:

(1) $\sqrt{9a^2}$ $(a<0)$; (2) $\sqrt{16a^4}$;

(3) $\sqrt{a^2(b+c)^4}$; (4) $\sqrt{(x+y)^2(x-y)^2}(y>x)$;

(5) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{9b^2}}$ $(b<0)$; (6) $\sqrt{\dfrac{25y^4}{125x^6}}$ $(y<0)$;

(7) $\sqrt{\dfrac{x+y}{(x-y)^2}}$ $(x>y)$; (8) $\sqrt{\dfrac{3}{m^2-2mn+n^2}}$ $(m>n)$.

B 组

1. 化简:

(1) $\dfrac{a}{a-2b}\sqrt{\dfrac{a^2b-4ab^2+4b^3}{a}}$ $(2b>a)$;

(2) $2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{6a^2b^2}$ $(a<0, b<0)$.

2. x, y 为何值时,下列各式在实数范围内有意义?

(1) $\sqrt{xy}$; (2) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

小结与复习

一、内容提要

1. 本章在数的开方的知识基础上，比较系统地讲述了二次根式的概念、性质和运算. 本章主要内容是二次根式的化简与运算，有关的概念和性质都是为二次根式的化简与运算做准备的.

2. 二次根式的有关概念是二次根式化简与运算的基础. 其中最重要的概念是最简二次根式.

最简二次根式就是满足下列条件的二次根式:

(1) 被开方数的因数是整数，因式是整式;

(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

化成最简二次根式之后，被开方数相同的二次根式，叫做同类二次根式.

3. 二次根式的性质是二次根式化简与运算的根据. 二次根式的主要性质是:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a\,(a\geqslant 0), \\ -a\,(a<0); \end{cases}$$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0);$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0, b>0).$$

4. 在进行二次根式的化简与运算时，一般遵循以下做法：

(1) 先将式中的二次根式适当化简；

(2) 二次根式的乘法可以参照多项式乘法进行，运算中要运用公式 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$.

(3) 对于二次根式的除法，通常是先写成分式的形式，然后通过分母有理化进行运算. 有时可以利用约分，有时可以利用公式 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (a\geqslant 0, b>0)$.

(4) 二次根式的加减法与多项式的加减法类似，是在化简的基础上去括号与合并同类项.

(5) 运算结果一般要化成最简二次根式.

二、学习要求

1. 能结合二次根式的化简与运算，了解最简二次根式与同类二次根式的概念并会辨别它们.

2. 掌握二次根式的性质，能根据二次根式的性质熟练地化简二次根式.

3. 掌握二次根式的加、减、乘、除的运算法则，会用它们进行运算，会将分母中含有一个或两个二次根式的式子进行分母有理化.

4. 能结合二次根式的化简与运算，进行求二次根式的值的近似计算.

三、需要注意的几个问题

1. 对于二次根式，首先要明确被开方数必须是非负数，也就是说，对于 $\sqrt{a}$，要求 $a\geqslant 0$，它才在实数范围内有意义.

2. 为了减少学习的困难，我们规定，在本章中，如果没有特别说明，根号内所有字母都表示正数. 但是，今后我们学习中遇到的二次根式，根号内的字母是可能取负值的. 像 $\sqrt{b^2-4ac}$，在下一章会经常遇到，要使它有意义，只要 $b^2-4ac\geqslant 0$ 就可以了，这时，a,b,c 都可能取负值. 如 $a=-1,b=-3,c=-2$ 时，$\sqrt{b^2-4ac}$ 是有意义的.

3. 对于本章的概念，如最简二次根式，不要去死背定义. 怎样才算了解这个概念了呢？给一个二次根式，能判断它是不是最简二次根式，如果不是，会把它化成最简二次根式. 这才是实际学好了最简二次根式的概念.

4. 在进行二次根式的化简与运算时，往往需要先将式子中的二次根式适当化简. 例如，在进行除法运算时，适当化简就可能利用约分简化运算；又如，在进行加减法运算时，则必须先将各根式化成最简根式，并注意只有同类根式才能进行加减合并.

复习题十一

A 组

1. x 是什么值的时候，下列各式在实数范围内才有意义？

(1) $\sqrt{x-3}$；　(2) $\sqrt{3-x}$；

(3) $\sqrt{1+x^2}$；　(4) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$；

(5) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}$；　(6) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$.

2. 在实数范围内把下列各多项式分解因式：

(1) x^2-7;　(2) $4a^4-1$;

(3) a^4-6a^2+9;　(4) $m^4-10m^2n^2+25n^4$.

3. 下面的推导错在哪里？

(1) $\because\ (-3)^2=3^2$,

$\therefore\ \sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}$.

$\because\ \sqrt{(-3)^2}=-3$,　$\sqrt{3^2}=3$,

$\therefore\ -3=3$.

(2) $\because\ -2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\times 3}=\sqrt{12}$,

而　$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$,

$\therefore\ -2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

$\therefore\ -2=2$.

4. 把下列各式化成最简二次根式：

(1) $\sqrt{500}$；　(2) $\sqrt{12x}$；　(3) $\sqrt{3a^2b^3}$；

(4) $\sqrt{4\dfrac{2}{3}}$；　(5) $\sqrt{\dfrac{2}{3ab^2}}$；　(6) $x^2\sqrt{\dfrac{y}{8x}}$；

(7) $\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{a}}\ (x>y)$;　(8) $(x-y)\sqrt{\dfrac{b^3}{x^2-y^2}}\ (x>y)$.

5. 计算:

(1) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{6}\right)$;

(2) $7\sqrt{a}+5\sqrt{a^2x}-4\sqrt{\frac{b^2}{a}}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}}$;

(3) $2\sqrt{12}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\div 5\sqrt{2}$;

(4) $9\sqrt{45}\div 3\sqrt{\frac{1}{5}}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$;

(5) $\left(6\sqrt{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

(6) $(\sqrt{2x}-3\sqrt{8x^3})\div 8\sqrt{\frac{x}{4}}$;

(7) $(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12})\div\sqrt{6}$;

(8) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{6})(2\sqrt{3}-3\sqrt{6})$;

(9) $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(x>1)$;

(10) $(8\sqrt{5}+6\sqrt{3})^2$;

(11) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{1\frac{2}{3}}-\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2$;

(12) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$;

(13) $\frac{4\sqrt{5}+3\sqrt{6}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

(14) $(5\sqrt{3}+2\sqrt{5})\div(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

6. 当 $x=2-\sqrt{3}$ 时,求下列代数式的值:

$$(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}.$$

7. 已知 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，求下列各式的值：

(1) x^2-xy+y^2；　　(2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

8. 已知 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中 a,b,c 都是实数，并且 $b^2-4ac\geqslant 0$. 求证：

(1) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$；　(2) $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$；

(3) $ax_1^2+bx_1+c=0$；　(4) $ax_2^2+bx_2+c=0$.

9. 解下列方程：

(1) $\sqrt[3]{6}(x+1)=\sqrt{7}(x-1)$；

(2) $\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}+1=\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}$.

10. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1,\\ \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=\sqrt{7},\\ \sqrt{6}x-\sqrt{7}y=\sqrt{5}.\end{cases}$

11. 求与所给长方形面积相等的正方形的边长 a：

(1) 长为 100cm、宽为 50cm 的长方形；

(2) 长为 96cm，宽为 12cm 的长方形.

12. 设直角三角形的两条直角边分别是 a,b，斜边是 c：

(1) 如果 $a=2\sqrt{3}+1$，$b=2\sqrt{3}-1$，求 c；

(2) 如果 $a=8-\sqrt{2}$，$b=8+\sqrt{2}$，求 c.

13. 求下列各式的值(结果保留三个有效数字):

(1) $\sqrt{2\times 9.8\times 20}$;　(2) $\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})$;

(3) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$;　(4) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$.

B 组

1. x 是怎样的实数时,下列各式在实数范围内有意义?

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{2x-1}}$;　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

(3) $\sqrt{x^2-1}$;　(4) $\sqrt{1-x^2}$.

2. 计算:

(1) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{6})(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{6})$;

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})$;

(3) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}\ (n>2)$.

3. 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,求下列各式的值:

(1) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$;　(2) $\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}$.

4. 已知 $a>1$,判断下列各式是否正确:

(1) $a>\sqrt{a}$;　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{a}}>a$;

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}<\dfrac{1}{a}$.

5. 解下列方程:

(1) $\sqrt{x}=5$;　(2) $\sqrt{2x}=5$;

(3) $\sqrt{2x-1}=5$;　(4) $\sqrt{5x+1}=6$.

自我测验十一

（满分 100 分，时间 45 分）

1. （每小题 4 分，共 16 分）填空：

（1）当 x 满足_____的条件时，$\sqrt{\frac{-2}{x^2}}$ 在实数范围内有意义；

（2）三角形的三边分别长 $\sqrt{20}$ cm，$\sqrt{40}$ cm，$\sqrt{45}$ cm，这个三角形的周长是_____cm；

（3）$\sqrt{2}-1$ 的倒数是_____；

（4）当 $x<-2$ 时，$\sqrt{(x+1)^2}=$_____.

2. （每小题 10 分，共 20 分）

（1）长方形的长 $a=3\sqrt{10}$ cm，宽 $b=2\sqrt{15}$ cm，求它的面积 S；

（2）直角三角形的直角边 $a=0.4$m，$b=0.6$m，求它的斜边 c.

3. （每小题 10 分，共 20 分）已知 $\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，求下列各式的值（精确到 0.01）：

（1）$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$；　　（2）$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

4. （每小题 10 分，共 20 分）

（1）已知 $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}$，求 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$ 的值；

（2）已知 $x=2-\sqrt{10}$，求 x^2-4x-6 的值.

5. (每小题 12 分,共 24 分)计算:

(1) $5\sqrt{\frac{48}{5}}+4\sqrt{\frac{125}{3}}$;

(2) $\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

附录　部分习题答案

第八章　因式分解

习题 8.1

A 组

1. (1) $(m+4)(m-4)$;　　(3) $(y-3)^2$.

2. (1) $c(x-y+z)$;　　(3) $5a^2(3a-2)$;

(5) $xy(4x-y)$;　　(7) $6a^2m(4a-3m)$.

3. (1) $7b-4b^2+1$.

4. (1) $5x^2y(3xy+1-4y^2)$;　　(3) $-8x^2(2x^2+4x-7)$.

5. (1) $(a+b)(x-y)$;　　(3) $2(p+q)(3q-2p)$;

(5) $(a-b)(2a-b)$;　　(7) $-(2a+b)(a+3b)$.

6. (1) $(x-y)(p+q)$;　　(3) $(a+b)(a-b-1)$;

(5) $5(x-y)(2ax-2ay+b)$;　　(7) $(a-x)(a-y)(x-y)$.

B 组

1. (1) 314.　　**2.** 220.

习题 8.2

A 组

1. (1) $(a+7)(a-7)$;　　(3) $(1+6b)(1-6b)$;

(5) $(0.7p+12q)(0.7p-12q)$;　　(7) $(ap+bq)(ap-bq)$.

2. (1) $m(m+2n)$;　　(3) $3(x+y)(x-y)$;

(5) $(7p+5q)(p+7q)$.

3. (1) $(9a^2+b^2)(3a+b)(3a-b)$;　　(3) $3a(x+y^2)(x-y^2)$.

4. (1) $(x-1)^2$; (3) $(1-2t)^2$; (5) $(b-11)^2$.

5. (1) $(5m-8)^2$; (3) $(2p-5q)^2$.

6. (1) $(5a^2-4b^2)^2$; (3) $(ab-2)^2$.

7. (1) $(x+y+3)^2$; (3) $(2-3x+3y)^2$.

8. (1) $-(x-y)^2$; (3) $3(1-x)^2$.

9. (1) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$; (3) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$.

10. (1) $\left(1-\frac{1}{2}a\right)\left(1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a^2\right)$;

(3) $(xy-3)(x^2y^2+3xy+9)$.

11. (1) $(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)$;

(3) $-a(1+a)(1-a+a^2)$.

12. (1) $x^3(x+y)(x-y)$; (3) $x(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

***B*组**

1. (1) 508 000. **2.** 128 厘米^2. **3.** 175.84 厘米^2. **4.** ± 1.

5. (1) $(x+2y)(x-2y)$, $(x+2y)^2$, 公因式为 $(x+2y)$.

习题 8.3

***A*组**

1. (1) $(a+b)(m+n)$; (3) $(a+b)(a+c)$;

(5) $(4y-3z)(x+2)$.

2. (1) $(3y-2)(x-4)$; (3) $(5x+7y)(a-b)$.

3. (1) $3(a-b^2)(2x-5y^2)$; (3) $(a-c)(3a-b)$.

4. (1) $(x+a)(x-a-2)$; (3) $(2x-y+a)(2x-y-a)$.

5. (1) $a(1+a)(1-a)$; (3) $x(1+x)(1-x+x^2)$.

6. (1) $(2x-y)(2x+y+1)$; (3) $xy(x+2y)(x+1)(x-1)$.

B 组

1. $(z+x-y)(z-x+y)(z+x+y)(z-x-y)$.

2. 提示：$x^2-11x+24=x^2-3x-8x+24$.

3. 提示：$x^4+4=x^4+0+4=x^4+4x^2-4x^2+4$.

4. 提示：$4x^4+1=4x^4+0+1=4x^4+4x^2+1-4x^2$.

习题 8.4

A 组

1. (1) $(x+1)(x+8)$; (3) $(x-2)(x+5)$;
   (5) $(a-3)(a+7)$; (7) $(p-1)(p-7)$.

2. (1) $(x^2-2)(x^2+9)$; (3) $(mx-2)(mx-6)$.

3. (1) $(x-3y)(x-4y)$; (3) $(m-2n)(m+6n)$.

4. (1) $-y(x-2)(x-4)$; (3) $a(b+c)(b+3c)$.

5. (1) $x(x+1)(x-16)$; (3) $(x+1)^2(x-2)(x+4)$;
   (5) $(x+y+2)(x+y-2)(x^2+2xy+y^2+5)$.

6. (1) $(2x+1)(x+1)$; (3) $(2x-3)(3x-2)$;
   (5) $(2x-3y)(3x-y)$.

B 组

1. (1) $(2n-3)(2n+5)$; (3) $(10x-y)(x-2y)$.

2. (1) $(x+2)(x+7)$, $x(x+7)(x-7)$, $(x-5)(x+7)$, 公因式为 $(x+7)$.

复习题八

A 组

2. $-a$, $\frac{1}{a}$, $|a|$. 举例略. 3. (1) $1\frac{5}{7}$; (3) $-22\frac{3}{4}$.

5. (1) $2n$ 是偶数，$2n-1$ 是奇数，$2n+1$ 是奇数.

7. (1) $x=7$；　(2) $x=\frac{1}{38}$.

8. (1) $\begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=2, \\ y=-6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=4, \\ y=2, \\ z=3; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=-a+b+c, \\ y=a-b+c, \\ z=a+b-c. \end{cases}$

9. 24cm^2.

10. $p=-6, q=11, r=-6$.

11. (1) $x>3$；　(3) $x>\frac{11}{2}$；　(4) 1, 2, 3, 4, 5.

13. (1) $x^3-7x^2+3x+18$；　(2) $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$.

14. (1) 0；　(2) $-24x$.

15. (1) $(x^6-y^6)^2, 63^2=3\,969$；(2) $a^{16}-b^{16}, 1-10^{16}$.

17. (1) $(x+8)(x-8)$；　(3) $x(x+4)(x^2-4x+16)$；

(5) $2x(a-b)$；　(7) $(9x+y)(x+9y)$；

(9) $4a(b+c)$；　(10) $(a+b-3)(a+b+5)$.

18. (1) $(mn+3)(m^2n^2-3mn+9)$；

(3) $(2+3a+2b)(2-3a-2b)$；

(5) $2(7a-8b)^2$；　(7) $(x+2)(2x+1)$；

(9) $\frac{4}{3}y\left(x-\frac{3}{2}z\right)$；

(10) $(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$.

19. (1) $(x+2y)(x-2y+1)$；

(3) $(x+y)(x-y)(a-c)(a^2+ac+c^2)$；

(5) $(5a-7x)(2ax-3y^2)$.

20. (1) $(x+5y)(x-6y)$；(3) $(a+b)(a-b)(a+2b)(a-2b)$；

(5) $(x-6y)^2$；　(7) $(4y+1)(5y-1)$；

(9) $(2x-3y)(3x+2y)$; (10) $(5a-b)(6a+b)$.

21. (1) $(ad+bc)(ac+bd)$; (2) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

B 组

1. (1) $a^m(a+1)$; (3) $(a-b)^n(a-b+1)(a-b-1)$;
(5) $p^m(p-1)(p^2+p+1)$;
(6) $q^{n-3}(1+q)(1-q+q^2)$.

2. (1) $(7x-3)(2x+1)$; (3) $(2m-5n)(3m+4n)$.

3. (1) 20; (2) 782.1.

6. 0.85米^3. 7. 3.7×10^2吨.

自我测验八

1. (1) 积; (2) 提公因式;
(3) $25,5;9p^2-3p;x^3,4x^3+16;\ \frac{b^2}{4},\frac{a}{6};-14xy,7x$;
(4) $5y$.

2. (1) $(a-4)(b-c)$; (2) $a(a-b)(c+d)$;
(3) $4b(3a^2+4b^2)$; (4) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$;
(5) $(x-a)(x+b)(x-b)$;
(6) $(a-2b+4)(a-2b-3)$;
(7) $(2x-2y-3)(x-y+1)$;
(8) $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$.

3. (1) $(a+b)(x+y)(a-b)(x-y)$;
(2) $(x+3y)(x+2y+1)$;
(3) $(x+y-2)^2$.

4. (1) $3x+5$; (2) $3x+y$.

第九章　分　　式

习题 9.1

A 组

1. $\frac{1}{xy}$，$\frac{a}{b+1}$，$\frac{a+b}{c}$，$\frac{x-1}{x+1}$.

3. (1) $x \neq \frac{1}{3}$，　　(3) $x \neq 2$.

B 组

(1) x 取任意数时，分式有意义，x 为 0 时，分式的值为零；

(3) $x \neq 5$ 时，分式有意义，x 取任何数都不能使分式的值为零.

习题 9.2

A 组

1. (1) 分子、分母同乘以 $z(z \neq 0)$；

(3) 分子、分母同乘以 $(x-1)(x-1 \neq 0)$.

2. (1) $15x$.

3. (1) $\frac{x-50}{30x+4}$.

5. (1) $\frac{x^2+1}{x-3}$；　　(3) $\frac{a^3-a^2+1}{a^3+a^2-1}$.

B 组

1. (1) 分子、分母同乘以 $(x-3)(x-3 \neq 0)$；

(3) 分子、分母同除以 $(x+4)(x+4 \neq 0)$.

2. (1) $\frac{5-4x}{x^2-x+3}$; (3) $\frac{b}{(a-b)(b-c)}$.

习题9.3

A组

1. (1) $-2ab$; (3) $\frac{4b^2}{5c}$; (5) $\frac{1}{b}$.

2. (1) $\frac{x-1}{x+1}$; (3) $\frac{3}{a+b}$; (5) $\frac{x-y}{2}$.

3. (1) $\frac{x+y}{x}$, 1.7.

4. (1) $\frac{1}{2}$; (3) $-\frac{7a^2}{6n}$.

5. (1) $-\frac{x(x-y)}{(x+y)^2}$. 6. (1) $\frac{x+y}{xy}$.

7. (1) $\frac{y^8}{x^{12}}$; (3) $-\frac{y^3}{z^4}$.

B组

1. (1) $-\frac{4}{3}$. 2. (1) -1.

3. (1) $\frac{b^{2n}}{a^{3n}}$.

习题9.4

A组

1. (1) $-\frac{6x(x-1)}{12x^3}$, $\frac{16x^2}{12x^3}$, $\frac{3(x+1)}{12x^3}$;

(3) $\frac{bx}{ab(x-y)}$, $-\frac{ay}{ab(x-y)}$.

2. (1) $\frac{x}{x^2-x-2}$，$\frac{x+1}{x^2-x-2}$；

(3) $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$，$\frac{x(x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$.

3. (1) 2；　　(3) $\frac{3}{2}$.

4. (1) $\frac{x-3y}{(x-y)^2}$.

5. (1) $\frac{x^2+y^2}{x+y}$；　(3) $\frac{3}{(x+1)(x+3)}$；　(5) x^2-y^2.

B 组

1. (1) $\frac{a(a+1)(a+2)}{a^2(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)}$，

$\frac{2(a-2)(a+2)}{a^2(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)}$，

$-\frac{a^2(a+1)(a-2)}{a^2(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)}$.

2. (1) $\frac{a+b}{(a-b)(b-c)}$，$-\frac{b+c}{(a-b)(b-c)}$.

3. (1) 0；　　(3) $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$.

习题 9.5

A 组

1. $x=a-2b$.　　3. $x=0$.

5. $y=\frac{6(x+10)}{5}$.　7. $W=nDV$.

9. (1) $D=2lM+d$.

B 组

1. $x=a^2+ab+b^2$.　　3. $l=\frac{A}{\pi r}-r$.

习题 9.6

A 组

1. (1) $x=10$;　　(3) $x=2$.

2. (1) $P=\dfrac{100Q}{N}$;　　(3) $D=2t+d$.

3. 设应把 x 公顷旱田改为水田. $x=100$ (公顷).

5. 设需加水 x 克. $x=90$ (克).

B 组

1. (1) $x=-1$ 是增根，原方程无解;
   (3) $x=4$.

2. (1) $z=\dfrac{bc+ad}{d+c}$;　　(3) $f_1=\dfrac{Ff_2}{f_2-2F}$.

3. 设大队的速度是 x 千米/时，则先遣队的速度是 $1.2x$ 千米/时，根据题意，得

$$\frac{15}{x}=\frac{15}{1.2x}+\frac{1}{2}.$$

解得　$x=5$ (千米/时).

复习题九

A 组

1. 整式为 $3,\dfrac{x^2-y^2}{2},\dfrac{1}{\pi}(x+y)$;

分式为 $\dfrac{1}{x},3+\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}(z+x),\dfrac{1}{x+1},$

$$\frac{x^2+1}{2x},\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}.$$

3. 不等于零的所有数.

4. (1) $x\neq 3$;　　(3) $x\neq 2$.

5. $x=2$.

6. (1) 1; (3) 0; (5) $\frac{4}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$.

7. (1) $\frac{x^3}{x^4-x^2+1}$.

8. (1) $S=\frac{12000H}{d^2n}$; (3) $a=\frac{m-en}{1-e}$.

9. (1) $x=1$ 是增根，原方程无解.

10. 设现在平均每天采煤 x 吨. $x=1\,100$ (吨).

12. 设人工每分译电 x 个字. $x=20$ (个), 75 $x=1\,500$ (个).

B 组

1. $\frac{4(x+2)}{x^2-2x+4}$.

5. $a=\frac{S-\pi(R^2-r^2)}{2(R-r)}$.

自我测验九

1. (1) $\frac{A}{B}$，含有字母; (2) $\neq \frac{2}{3}$，$=-1$;

(3) $\frac{v-v_0}{a}$.

2. (1) $-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; (2) $\frac{2}{x}$; (3) $\frac{x-y}{xy}$;

(4) $\frac{a^2+4a+8}{a+2}$; (5) $-a^5$; (6) 1.

3. (1) $\frac{x+y}{x-y}$; (2) $x+1$.

4. (1) $x=-3$; (2) $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

5. (1) $x=ab$; (2) $x=0$.

6. 每小时甲做 30 个零件，乙做 40 个.

第十章　数的开方

习题 10.1

A 组

3. $\pm 60, 60; \pm \frac{1}{8}, \frac{1}{8}; \pm 100, 100; \pm 2.7, 2.7;$

$\pm 0.2, 0.2; \pm \frac{11}{17}, \frac{11}{17}; \pm 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5}$.

4. $0, -9, 0.3, 25, \pm \frac{5}{6}, 10^{-3}$.

5. (1) ± 5;　　(3) $\pm \frac{7}{2}$.

6. (1) 15;　　(3) -0.3.

7. 4m.

B 组

1. (1) $x \geqslant 0$;　　(3) x 为任何实数.

2. a.

习题 10.2

A 组

1. (1) 3.162;　　(3) 9.889;
(5) 1.221;　　(7) 2.423.

2. C.

3. (1) 29.44;　　(3) 0.275 5;
(5) 295.6;　　(7) 0.018 91.

4. (1) 1.905; (3) −1.500;
(5) 0.464 5; (7) 16.69.

5. 2.6m.

习题 10.3

A 组

1. (1) 97; (3) −1.929;
(5) −10 143; (7) 380;
(9) 1.955; (11) 1.081;
(13) 13 385; (15) 13 800;
(17) 37.8.

2. (1) 3.24; (3) 56 169;
(5) 1 331; (7) −0.027.
(9) 1.464 1; (11) 3 125.

习题 10.4

A 组

2. (1) −0.3; (3) $\frac{5}{3}$;
(5) $\frac{2}{3}$; (7) −0.9.

3. (1) 0.2; (3) $\frac{3}{2}$.

B 组

1. $10, 10^2, 10^3, 10^2, 10^3, 10^4$.

习题 10.5

A 组

1. (1) 0.730 6; (3) −1.331;
   (5) 7.577; (7) −0.376 1.
2. (1) 0.756 0; (3) −19.54;
   (5) 73.68; (7) 0.037 28.
3. (1) 3; (3) −1.86.
4. 4.1cm.

习题 10.6

A 组

1. (1) 3.642; (3) 17.03.
2. (1) 0.756 0; (3) −19.54;
   (5) 73.68; (7) 1.465.
3. (1) −2.15.
4. 1.2m.
5. (1) 6.216; (3) 3.981; (5) 0.716 7.

B 组

1. (1) $\sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{2}$; (3) $\sqrt[5]{2} < \sqrt[5]{3}$.

习题 10.7

A 组

1. $\frac{22}{7}$, 3.14159265, −8, 0.6, $3\frac{1}{4}$, $\sqrt{36}$, 1.732 是有理数; $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\frac{\pi}{3}$ 是无理数.

3. $\sqrt[3]{8}$，$\sqrt{17}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\sqrt{3}-1.7$，$\sqrt{2}-1.4$.

4. (1) 0.65.

5. (1) $0>-0.1$；　　(3) $3.1416>\pi$.

B 组

1. 是无限不循环小数，因而是无理数.

复习题十

A 组

1. (1) 平方，平方根.

2. D.

3. $\pm 8, 8$；$\pm 6, 6$；$\pm 0.5, 0.5$；$\pm\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$；$\pm 3, 3$；$\pm\frac{2}{5}$，$\frac{2}{5}$；$\pm\frac{4}{13}$，$\frac{4}{13}$.

4. (1) 9.711；　　(3) 0.270 6；
(5) 22.97；　　(7) 3.296；
(9) 6.527 (或 6.530)；
(11) 0.126 2；　　(13) $-0.058\ 4$.

5. (1) ± 13；　　(3) $\pm\frac{8}{3}$；
(5) 40.

6. $4\sqrt{2}$ cm.

7. 6.3cm.

8. 7.9×10^3 米/秒，1.1×10^4 米/秒.

9. D.

11. $2\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{7}$，$\sqrt{7}-\sqrt{5}$，$1.6-\frac{\pi}{2}$.

12. (1) $1.5>1.547$; (3) $-3.141\,592\,6>-\pi$.

13. (1) 6.12.

B 组

2. a.

3. (C).

4. 3.63cm.

5. (1) $10, 10^2, 10^3, 10^n$;

(3) $10, 10^2, 10^3, 10^n$.

6. (1) 是.

7. (1) 4 390; (3) 159 505;

(5) 61.4; (7) 4 750;

(9) 30 240; (11) 1 442.897.

8. (1) 0.598 9; (3) -3.150.

自我测验十

1. (1) 算术平方根; (2) 0;

(3) 非负数; (4) 无限不循环;

(5) 实; (6) 实数.

2. $\sqrt[3]{16}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt{10}$, -3, 0.

3. (1) $1.73<\sqrt{3}$; (2) $-3>-\pi$.

4. (1) 1.868; (2) 0.351 3;

(3) $-0.361\,1$; (4) -7.483 (或 -7.482).

5. 22.4cm.

6. 260 cm^2.

第十一章　二次根式

习题 11.1

A 组

1. (1) $a \leqslant 5$;　　(3) $a \geqslant 0$.
2. (1) 11;　　(3) -6;　　(5) 320.
3. (1) $(\sqrt{9})^2$ (或 3^2); (3) $(\sqrt{2.5})^2$.
4. (1) 不成立.

B 组

1. (1) 任意实数;　　(3) $x>0$.
2. (1) $(x+3)(x-3)$; (3) $(2a+\sqrt{7})(2a-\sqrt{7})$.

习题 11.2

A 组

1. (1) $2^2\times 7$;　　(3) $2^3\times 3^2$;　　(5) $2^2\times 3\times 5^2$.
2. (1) 14;　　(3) $6\sqrt{2}$;　　(5) $6x$.
3. (1) $125\sqrt{3}$;　　(3) 5;　　(5) $2x\sqrt{3x}$.
4. (1) $3\sqrt{13}$;　　(3) $5\sqrt{5}$.
5. (1) $5\sqrt{2}$ cm.
6. (1) $12\sqrt{7}$;　　(3) 30;　　(5) $\frac{9a}{2}$.
7. (1) $4\sqrt{6}$.　　8. (1) $\sqrt{30}$.
9. (1) 不成立.

B 组

1. (1) $\sqrt{10}$;　　(2) $\sqrt{5}$.
2. (1) $6\sqrt{3}$;　　(3) $\frac{3}{2}$.

3. (1) 6; (2) 9.

习题 11.3

A 组

1. (1) $\frac{3}{7}$; (3) $\frac{2}{27}$; (5) $\frac{a\sqrt{b}}{2c}$.

2. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (3) $\sqrt{2}$.

3. (1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; (3) $\frac{\sqrt{5}}{30}$; (5) $2y\sqrt{2x}$.

4. (1) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; (3) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

5. (1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; (3) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

6. (1) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm; (3) $\frac{\sqrt{30}}{5}$ cm.

B 组

1. (1) $\sqrt{a}$. 2. (1) $\frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a}$.

3. (1) 4.90; (3) 0.82.

习题 11.4

A 组

1. (1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; (3) $\frac{\sqrt{xy}}{y}$;

(5) $5m\sqrt{m+2}$; (7) $\frac{\sqrt{21(a-b)(a+b)}}{9(a+b)}$.

2. (1) $2\sqrt{10}$. 3. $\sqrt{0.5}\approx 0.707$.

B 组

1. (1) $\frac{2\sqrt{b-1}}{3}$.　　2. (1) $5\sqrt{2}$.

习题 11.5

A 组

2. (1) 不正确,$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式,不能合并;
(3) 不正确,不能直接把被开方数除以 2.

3. (1) $9\sqrt{2}$;　　(3) $6-\frac{5\sqrt{6}}{6}$;

(5) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$;　　(7) $9a\sqrt{3a}$;　　(9) $\frac{5ab\sqrt{3a}}{2}$.

4. (1) $-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$;　　(3) $\frac{4\sqrt{3}}{3}+5\sqrt{2}$;

(5) $(6+4b)\sqrt{a}$.

5. (1) 0.　　6. (1) $73\sqrt{2}$.

7. (1) 0.98;　　(2) 10.06.

B 组

1. (1) 不正确(例略);　　(3) 不正确(例略).

2. (1) $30\sqrt{2}$;　　(3) $12\sqrt{6}$.

3. $(4+2\sqrt{2})a$.

4. (1) $90\sqrt{2}+120\sqrt{3}$;　　(3) -1.

习题 11.6

A 组

1. (1) $6+10\sqrt{6}$;　　(3) $xy-2y+x$.

2. (1) $16\sqrt{2}-4\sqrt{6}$;

(3) $-9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+15\sqrt{6}-24$;

(5) $2x+2\sqrt{3x}+3\sqrt{2x}+3\sqrt{6}$.

3. (1) 43; (3) -30;

(5) $175+28\sqrt{21}$; (7) $9a+12\sqrt{x}+\frac{4x}{a}$.

4. (1) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; (3) $\frac{7\sqrt{n}}{3}$;

(5) $\sqrt{5}+2$; (7) $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. (1) $\frac{\sqrt{30}}{90}$; (3) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$;

(5) $\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{12}$; (7) $-\frac{61}{37}-\frac{28\sqrt{3}}{37}$.

6. (1) 0.87; (3) 0.44; (5) 0.54.

7. (1) $4+\sqrt{3}$.

8. (1) 0; (3) $\frac{(x-y+y^2)\sqrt{x-y}}{y(x-y)}$.

B 组

1. (1) $\frac{13-3\sqrt{7}+\sqrt{21}}{2}$; (3) $16\sqrt{2}-\frac{122}{23}\sqrt{6}-\frac{77}{23}$;

(5) $5-4\sqrt{3}$.

2. (1) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; (3) $-5+2\sqrt{3}$, $-5-2\sqrt{3}$.

3. (1) $x=9$; (3) $x=\frac{441}{4}$.

习题 11.7

A 组

1. (1) -30; (3) $-x-5$; (5) $2-x$.

2. (1) $-3a$; (3) $a(b+c)^2$;

(5) $-\dfrac{2a}{3b}$; (7) $\dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}$.

B 组

1. (1) $-\sqrt{ab}$.

2. (1) $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 或 $x\leqslant 0, y\leqslant 0$.

复习题十一

A 组

1. (1) $x\geqslant 3$; (3) x 为任意实数; (5) $x=0$.

2. (1) $(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$;

(3) $(a+\sqrt{3})^2(a-\sqrt{3})^2$.

3. (1) 错在 $\sqrt{(-3)^2}=-3$.

4. (1) $10\sqrt{5}$; (3) $ab\sqrt{3b}$;

(5) $\dfrac{\sqrt{6a}}{3ab}$; (7) $\dfrac{\sqrt{a(x^2-y^2)}}{a}$.

5. (1) $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$; (3) $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$;

(5) $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}-\dfrac{17}{2}$; (7) $15\sqrt{2}$;

(9) 1; (11) $5-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$;

(13) $\frac{131}{21}+\frac{17\sqrt{30}}{21}-\frac{\sqrt{10}}{3}$.

6. $2+\sqrt{3}$.

7. (1) $\frac{11}{2}$.

9. (1) $13+2\sqrt{42}$;

(2) $\sqrt{6}$.

10. (1) $\begin{cases} x=\sqrt{3}, \\ y=\sqrt{2}. \end{cases}$

11. (1) $50\sqrt{2}$ cm.

12. (1) $\sqrt{26}$.

13. (1) 19.8;

(3) -5.83.

B 组

1. (1) $x>\frac{1}{2}$;

(3) $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$.

2. (1) $-64+36\sqrt{2}$;

(3) n.

3. (1) 98.

4. (1) 正确;

(3) 不正确.

5. (1) $x=25$;

(3) $x=13$.

自我测验十一

1. (1) $x<0$;

(2) $(5\sqrt{5}+2\sqrt{10})$;

(3) $\sqrt{2}+1$;

(4) $-x-1$.

2. (1) $30\sqrt{6}$ cm^2;

(2) $\frac{\sqrt{13}}{5}$ m.

3. (1) 0.27;

(2) 5.83.

4. (1) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$;

(2) 0.

5. (1) $\frac{32\sqrt{15}}{3}$;

(2) $5+\frac{13\sqrt{6}}{6}$.

封面设计　陈圣西
图片摄影　路　遥

ISBN 7-107-01924-4

9 787107 019241 >

ISBN 7—107—01924—4
G·3602(课)　定价：4.50 元